

Математика, 10–11 класс, МВ+ (25 мая 2023)

Задания, ответы, указания

Составители: Ю. В. Кузьменко, Д. А. Калинин, В. Н. Ксенофонтов.

1. На рисунке изображена часть графика линейной функции $f(x)$. Найдите значение суммы $f(-2023) + f(2023)$.

Ответ: -2.

Указание: из свойств линейной функции следует, что $f(-2023) + f(2023) = f(-1) + f(1) = 2f(0) = -2$.

2. Из чисел 1, 2, 3, ..., 500 наугад выбирается число. Найдите вероятность, что выбранное число не кратно ни 2, ни 5.

Ответ: 0,4.

Указание. Из данных 250 чисел кратны 2, 100 чисел кратны 5, 50 чисел кратны 10, кратны 2 или 5 всего $250 + 100 - 50 = 300$ чисел. Значит, подходят $500 - 300 = 200$ чисел. Искомая вероятность $200/500 = 0,4$.

3. В какой точке достигается максимум функции $f(x) = x^3 + 2,25x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[-3; 3]$?

Ответ: 3.

Указание. Так как $f'(x) = 3x^2 + 4,5x - 3$, корни производной -2 и 0,5, то максимум может быть в точке -2 или 3. Подстановкой убеждаемся, что максимум при $x = 3$.

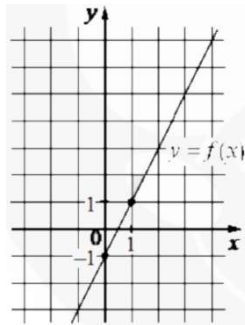
4. Дан шестиугольник, у которого три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и делят шестиугольник на 6 треугольников, площади которых равны (по часовой стрелке) 10, 20, 30, 40, 50. Найдите площадь оставшегося треугольника.

Ответ: 18,75.

Указание: произведение площадей четных и нечетных треугольников равны, $150/8 = 18,75$.

5. Астероид А шарообразной формы состоит из металла, имеет диаметр 6 м, весит 2560 тонн. Сколько тонн весит астероид В шарообразной формы из того же металла диаметром 9 м?

Ответ: 8640



Решение. Объемы шаров относятся как кубы радиусов. Значит, искомый вес равен $2560 \cdot (9/6)^3 = 8640$.

6. Решите уравнение

$$\frac{\sin(3x)}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin(3x)} = 2 \cos(2x).$$

Чему равна сумма градусных мер корней уравнения, лежащих на промежутке от 0° до 180° ?

Ответ: 180

Указание. Преобразуем левую часть:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{\sin x \sin 3x} = \frac{4 \sin x \cos 2x \sin 2x \cos x}{\sin x \sin 3x}.$$

Тогда $4 \sin x \cos 2x \sin 2x \cos x = 2 \cos 2x \sin x \sin 3x$,

откуда $2 \cos 2x \sin 2x \cos x = \cos 2x \sin 3x$,

либо (1) $\cos 2x = 0$, либо (2) $2 \sin 2x \cos x = \sin 3x$.

Разберем (2): $2 \sin 2x \cos x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$, $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x$, $2 \cos^2 x = \cos 2x$, что невозможно.

При (1) имеем корни 45° и 135° .

7. Найдите максимальное значение параметра a , при котором неравенство $a^2 - 2a \cdot 3^x - 3 \cdot 9^x > 0$ не имеет решений больших 1.

Ответ: 9.

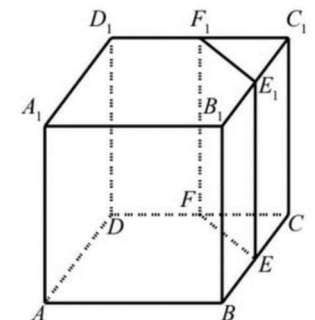
Указание. Рассмотрим неравенство в виде

$$\left(\frac{a}{3^x} - 3\right)\left(\frac{a}{3^x} + 1\right) > 0.$$

8. Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 12. Построено сечение $EFF_1 E_1$, проходящее через середины ребер BC , CD и $C_1 D_1$ и параллельное ребру CC_1 . Найдите объем треугольной призмы $CEFC_1 E_1 F_1$.

Ответ: 216.

Указание: куб можно разрезать на 8 таких призм, $12 \cdot 12 \cdot 12 : 8 = 216$.



9. Вася берёт кредит 1 января 2077 года на 25 месяцев под некоторое количество процентов. Условия возврата кредита таковы: 15 числа каждого месяца банк начисляет проценты, с 15 числа и до конца месяца необходимо погасить часть долга так, чтобы сумма долга уменьшалась всякий раз на одну и ту же сумму.

В итоге после того, как Вася расплатился по кредиту, оказалось, что общая выплаченная Васей сумма оказалась равна 2 000 000 рублей. Каков максимальный размер платежа, который Вася мог совершить в январе 2078 года?

Ответ: 80000.

Решение: Пусть Вася должен сумму S , каждый месяц сумма увеличивается на t процентов, каждый месяц сумма долга должна уменьшаться на d . Тогда через 25 месяцев Вася заплатил:

$$St + (S - d)t + (S - 2d)t + \dots = (25S - 24 \cdot 25/2 d)t + 25d = 2 \cdot 10^6,$$

Откуда $(S - 12d)t + d = 8 \cdot 10^4$. Заметим, что это в точности та сумма, которую он должен заплатить в январе 2078.

10. Гадалка пытается предсказать погоду на следующие 5 дней при помощи волшебного шара. Шар правильно предсказывает погоду с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что она первые 4 дня подряд угадает погоду, а на пятый день ошибется.

Ответ: 0,06.

Указание: $0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,06561$.

11. Трапеция описана около окружности. Её боковые стороны равны 13 и 15, одно из оснований равно 16. Найдите высоту трапеции.

Ответ: 12.

12. Для проведения эстафеты в классе из 29 человек выбирают команду из 3 человек. Каждому человеку присвоили свой номер от 1 до 29. Команда называется удачной, если сумма номеров членов команды кратна трём. Сколько существует способов собрать удачную команду?

Ответ: 1224.

Решение. Среди чисел от 1 до 29 кратны трём 9 чисел, по 10 чисел дают остатки 1 и 2. Номера членов удачной команды либо дают равные остатки, либо попарно различные. Первые 3 варианта дают $9 \cdot 8 \cdot 7 : 6 + 10 \cdot 9 \cdot 8 : 6 + 10 \cdot 9 \cdot 8 : 6 = 324$ способа, последний — $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ вариантов. Всего $324 + 900 = 1224$.

13. Сколько корней уравнения $4\cos^2(x) = 1 - \sqrt{2}\cos(\pi/2 + x)$ лежат на отрезке $[0; 5\pi/2]$?

Ответ: 3.

14. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 5)^5}{(x - 3)(x - 9)} \leq 0.$$

Ответ: 28.

15. Сколько целых значений x , строго больших -10 , для которых выполнено

$$\frac{(x - 2)(x - 4)(x - 7)}{(x + 2)(x + 4)(x + 7)} > 1?$$

Ответ: 3.