Блок 2. Геометрия

Интернет-карусель 2021–2022

Задания

1. Прямые AB и KL параллельны, точки C и M соответственно на отрезках AB и KL таковы, что отрезки AK, BL и CM пересекаются в точке P. Найдите длину отрезка KL, если $AC = 6$, $BC = 9$, $LM = 15$.

2. В холле высотного здания стоит его макет. Макет занимает 1 кв. метр пола и имеет высоту 85 см. Само здание занимает 28900 кв. метров земли. Сколько метров высота здания, если считать макет точным?

3. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ отмечены такие точки E и F, диагональ AC пересекает DE в точке K, отрезок EF — в точке L. Найдите сумма площадей треугольников ADK, EKL и CFL, если $AK = KL = LC = 4$.

4. Дан прямоугольный треугольник с катетами $BC = 6$ и $AC = 8$. Луч, выходящий из вершины C, пересекает медиану AD в точке K и гипотенузу AB в точке L. Найдите AL, если $AK = 2KD$.

5. Если AD — высота, биссектриса или медиана треугольника ABC, то стороны AB и AC называют прилежащими к ней. Какие из данных утверждений являются верными?

   (1) Высота треугольника не превосходит каждой из прилежащих сторон.

   (2) Биссектриса треугольника не превосходит каждой из прилежащих сторон.

   (3) Медиана треугольника не превосходит полусуммы прилежащих сторон.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны AD за вершину D отмечена точка E; на продолжении стороны AB за вершину B — точка F. Отрезок EF пересекает стороны BC и CD соответственно в точках L и K. Найдите площадь данного параллелограмма, если площади треугольников KDE, BFL и CKL соответственно равны 5, 20 и 45.

7. Точка D на катете AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A такова, что угол ABD вдвое меньше угла CBD. Найдите площадь треугольника ABC, если $BD = 1$, $BC = 5$.

8. Среди семи чисел 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20 есть 6 чисел, которые являются длинами сторон двух подобных треугольников, и еще одно «лишнее». Какое из чисел «лишнее»?

9. Дан треугольник ABC; $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = 8$. Точка D — середина AB. Точка E на стороне AC такова, что прямая DE отделяет от ABC треугольник, подобный треугольнику ABC. Найдите AE.

10. Какие из данных утверждений являются верными?

    (1) Существует параллелограмм площади $2S$, из которого можно вырезать треугольник площади больше S.

    (2) Существует четырехугольник площади $2S$, из которого можно вырезать треугольник площади больше S.

    (3) Из любого треугольника площади $2S$ можно вырезать параллелограмм, площадь которого больше S.

    (4) Из любого треугольника площади $2S$ можно вырезать четырёхугольник, площадь которого больше S.

11. Дан квадрат $ABCD$; точка E — середина стороны CD; точка F расположена на стороне AB. Отрезок EF пересекает диагонали BD и AC соответственно в точках K и L; точка K между точек F и L. Найдите длину отрезка KL, если $KF = 1$, $EL = 2$.

12. Площадь треугольника ABC равна 24. Точки D и E соответственно на сторонах AC и AB таковы, что $AC : AD = AE : BE = 2$. Найдите площадь треугольника ADE.

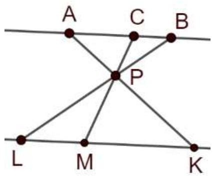
Блок 2. Геометрия

Интернет-карусель 2021–2022

Ответы, решения, комментарии

1. Прямые AB и KL параллельны, точки C и M соответственно на отрезках AB и KL таковы, что отрезки AK, BL и CM пересекаются в точке P. Найдите длину отрезка KL, если $AC = 6$, $BC = 9$, $LM = 15$.

   Ответ: 25.

   Указание. Пересекающиеся секущие к двум параллельным прямым образуют с ними подобные треугольники. Найдите в данной конфигурации три пары подобных треугольников.

   Решение. Пары треугольников LPM, BPC и KPM, APC подобны, в обеих парах коэффициент подобия один и тот же (он равен $PM : CP$). Поэтому $KM : AC = LM : BC$, $KM : 6 = 15 : 9$, $KM = 10$, $KL = KM + LM = 10 + 15 = 25$.

   Комментарий. Можно также рассмотреть ситуацию, когда в точке P пересекаются продолжения отрезков AK, BL и CM.

2. В холле высотного здания стоит его макет. Макет занимает 1 кв. метр пола и имеет высоту 85 см. Само здание занимает 28900 кв. метров земли. Сколько метров высота здания, если считать макет точным?

   Ответ: 144,5.

   Решение. Так как $28900 = 170^2$, поэтому здание в 170 раз больше макета. Его высота равна 85 см · 170 = 144,5 метров.

3. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ отмечены такие точки E и F, диагональ AC пересекает DE в точке K, отрезок EF — в точке L. Найдите сумма площадей треугольников ADK, EKL и CFL, если $AK = KL = LC = 4$.

   Ответ: 21.

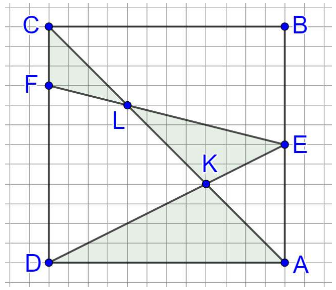
   Решение. Как известно, площадь квадрата с диагональю d равна $d^2/2$, значит, $S(ABCD) = (4 + 4 + 4)^2/2 = 72$.

   Так как $AK = AC/3$, то $S(AKD) = S(ACD)/3 = S(ABCD)/6 = 12$.

   Треугольники AKE и CKD подобны, $2AE = CD$, поэтому $2KE = KD$. Как известно, $S(KEL)/S(KDA) = (KE \cdot KL)/(KD \cdot KA)$. Получаем:
   $S(KEL) = KE/KD \cdot KL/KA \cdot S(KDA) = S(KDA)/2 = 6$.

   Треугольники CFL и AEL подобны, $2CL = AL$, поэтому $2LF = LE$. Как известно, $S(CFL)/S(KEL) = (LC \cdot LF)/(LK \cdot LE)$. Получаем:
   $S(CFL) = LC/LK \cdot LF/LE \cdot S(KEL) = S(KEL)/2 = 3$.

   Искомая площадь равна 12 + 6 + 3 = 21.

   Комментарий. На рисунке показано, как можно нарисовать чертеж на клетчатой бумаге так, чтобы все точки попали в вершины клеток. Если S — площадь одной клетки, то по клеткам можно найти площади треугольников:
   $S(ADK) = 24S, S(EKL) = 12S, S(CFL) = 6S$.
   Площадь квадрата равна $144S = 72$, $S = 2$.
   Искомая сумма равна (24 + 12 + 6) : 2 = 21.

4. Дан прямоугольный треугольник с катетами $BC = 6$ и $AC = 8$. Луч, выходящий из вершины C, пересекает медиану AD в точке K и гипотенузу AB в точке L. Найдите AL, если $AK = 2KD$.

   Ответ: 5.

   Решение. Указанный луч делит медиану AD в том же отношении, в котором её делит медиана из вершины C. Значит, CL — медиана треугольника, точка L — середина AB.

   Из теоремы Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $AB = 10$. Значит, $AL = 5$.

5. Если AD — высота, биссектриса или медиана треугольника ABC, то стороны AB и AC называют прилежащими к ней. Какие из данных утверждений являются верными?

   (1) Высота треугольника не превосходит каждой из прилежащих сторон.

   (2) Биссектриса треугольника не превосходит каждой из прилежащих сторон.

   (3) Медиана треугольника не превосходит полусуммы прилежащих сторон.

   Ответ: 1 и 3.

   Решение. Рассмотрим каждое из утверждений.

(1) Утверждение верное. Если высота AD совпадает со стороной треугольника, то она ей равна. Иначе в прямоугольных треугольниках ADB и ADC углы при вершине D — прямые, гипотенузы больше катетов. То есть $AD < AB$ и $AD < AC$.

(2) Утверждение неверное. Например, если угол B треугольника ABC тупой, то в треугольнике ABD напротив тупого угла B лежит большая сторона, откуда $AD > AB$.

(3) Утверждение верное — это известный факт. Если AD продлить до точки E, $AD = DE$, то $ABCE$ — параллелограмм, в нём $AC = BE$. Для треугольника ABE выполнено $AE < AB + BE$, откуда $2AD < AB + AC$, что и требовалось доказать.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны AD за вершину D отмечена точка E; на продолжении стороны AB за вершину B — точка F. Отрезок EF пересекает стороны BC и CD соответственно в точках L и K. Найдите площадь данного параллелограмма, если площади треугольников KDE, BFL и CKL соответственно равны 5, 20 и 45.

Ответ: 200.

Решение. Треугольники DEK и CLK подобны, площадь второго в $45 : 5 = 9 = 3^2$ раз больше, поэтому $KL = 3EK$. Треугольники BLF и CLK подобны, площадь второго в $45 : 20 = 9/4 = (1{,}5)^2$ раз больше, поэтому $3LF = 2KL$, $3LF = 6EK$, $LF = 2EK$.

Значит, $EF = EK + KL + LF = EK + 3EK + 2EK = 6EK$.

Треугольники EKD и EFA подобны с коэффициентом $EF : EK = 6$, значит $S\,(AEF) = 6^2 \cdot S(EKD) = 180$.

Остаётся заметить, что
$S\,(ABCD) = S\,(AEF) - S\,(DEK) - S\,(BFL) + S\,(CKL) = 180 - 5 - 20 + 45 = 200$.

7. Точка D на катете AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A такова, что угол ABD вдвое меньше угла CBD. Найдите площадь треугольника ABC, если $BD = 1$, $BC = 5$.

Ответ: 2,2.

Решение. На продолжении стороны AC за вершины A отметим точку E, что $AD = AE = a$. Тогда равны треугольники ABE и ABD, а BD — биссектриса угла B треугольника BCE. По свойству биссектрисы $DE : DC = BE : BC$, откуда $2a : CD = 1/5$, то есть $CD = 10a$, $AC = 11a$. Пусть $AB = h$, тогда $S\,(ABC) = 11ah/2 = 5{,}5ah$.

По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $(11a)^2 + h^2 = 5^2$, для треугольника ABD — $a^2 + h^2 = 1^2$. Из этих условий $a^2 = 1/5$, $h^2 = 4/5$, откуда $ah = 2/5$, $S\,(ABC) = 5{,}5ah = 11/5 = 2{,}2$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 9
2021–2022 учебный год

8. Среди семи чисел 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20 есть 6 чисел, которые являются длинами сторон двух подобных треугольников, и еще одно «лишнее». Какое из чисел «лишнее»?

Ответ: 18

Указание: подобны (8, 12, 16) и (10, 15, 20).

9. Дан треугольник ABC; $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = 8$. Точка D — середина AB. Точка E на стороне AC такова, что прямая DE отделяет от ABC треугольник, подобный треугольнику ABC. Найдите AE.

Ответ: 1 или 4.

Решение. У треугольников ABC и ADE общий угол A, поэтому треугольник ABC либо подобен ADE, либо AED. Тогда либо $AE : AC = AD : AB$, либо $AE : AB = AD : AC$. Выполнено $AE : 8 = 2 : 4$ или $AE : 4 = 2 : 8$, откуда $AE = 4$ или $AE = 1$.

10. Какие из данных утверждений являются верными?

(1) Существует параллелограмм площади $2S$, из которого можно вырезать треугольник площади больше S.

(2) Существует четырехугольник площади $2S$, из которого можно вырезать треугольник площади больше S.

(3) Из любого треугольника площади $2S$ можно вырезать параллелограмм, площадь которого больше S.

(4) Из любого треугольника площади $2S$ можно вырезать четырёхугольник, площадь которого больше S.

Ответ: 2 и 4.

Решение. Рассмотрим каждое из утверждений.

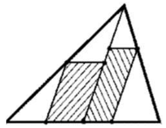
(1) Любой треугольник, который можно вырезать из параллелограмма — часть треугольника, вершины которого лежат на границе параллелограмма. Если вершины треугольника лежат на границе параллелограмма, то вершину внутри стороны можно заменить вершиной параллелограмма так, что площадь треугольника не уменьшится. Такими операциями можно получить треугольник с вершинами в вершинах параллелограмма — его площадь равна половине площади параллелограмма. Значит, из параллелограмма можно вырезать только треугольник, у которого площадь не более половины площади параллелограмма.

(2) Утверждение верное. Возьмем любой четырёхугольник, диагональ которого делит его на треугольники разной площади. Разрезав по этой диагонали, можно

оставить больший из треугольников — его площадь более половины площади четырёхугольника.

(3) Площадь параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади треугольника. Пусть дан треугольник ABC. Рассмотрим сначала случай, когда две стороны параллелограмма лежат на прямых AB и AC, а четвертая вершина X лежит на стороне BC. Если $BX : CX = x : (1 - x)$, то отношение площади параллелограмма к площади треугольника равно $2x(1 - x) \leq 1/2$.

В общем случае проведем параллельные прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма (см. рисунок справа). Площадь данного параллелограмма не превосходит суммы площадей заштрихованных параллелограммов, а они относятся к разобранному выше случаю. Если прямые, содержащие пару сторон данного параллелограмма, пересекают лишь две стороны треугольника, то можно ограничиться одним заштрихованным параллелограммом.

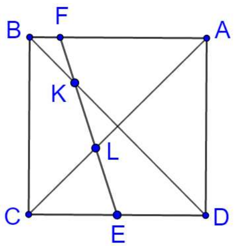


(4) От каждого треугольника можно отрезать маленький уголок и получить четырёхугольник, площадь которого почти такая же. Поэтому утверждение верное.

11. Дан квадрат $ABCD$; точка E — середина стороны CD; точка F расположена на стороне AB. Отрезок EF пересекает диагонали BD и AC соответственно в точках K и L; точка K между точек F и L. Найдите длину отрезка KL, если $KF = 1$, $EL = 2$.

Ответ: $KL = (1 + \sqrt{17})/2$.

Решение. Из параллельности AB и CD следует подобие пар треугольников CEL и AFL, BFK и DEK. Из этого следуют соотношения:



$$\frac{BF}{DE} = \frac{FK}{KE}, \frac{AF}{CE} = \frac{FL}{LE}.$$

Пусть $KL = x$.

Сложим равенства, с учётом $CE = DE, AF + BF = 2CE$ получаем уравнение:

$$2 = \frac{1}{x+2} + \frac{x+1}{2}.$$

Умножим на $2(x + 2) \neq 0$: $4(x + 2) = 2 + (x + 1)(x + 2)$ или $x^2 - x - 4 = 0$.

Корни квадратного уравнения равны $(1 \pm \sqrt{17})/2$, положительный корень равен $KL = (1 + \sqrt{17})/2$.

Замечание. Во время соревнования предлагалось оставить 2 цифры после запятой в десятичной записи числа. В данном случае $KL = (1 + \sqrt{17})/2 \approx 2{,}56$.

12. Площадь треугольника ABC равна 24. Точки D и E соответственно на сторонах AC и AB таковы, что $AC : AD = AE : BE = 2$. Найдите площадь треугольника ADE.

Ответ: 8.

Решение. Из условия $AD : AC = 1/2$, $AE : AB = 2/3$. Треугольники ABC и ADE имеют общий угол A, поэтому $S(ADE) = (AD : AC) \cdot (AE : AB) \cdot S(ABC) = 1/2 \cdot 2/3 \cdot 24 = 8$.