



## Блок 4. Делимость: остатки при делении

### Интернет-карусель (2021–2022)

#### Задания

1. Натуральное число увеличили на 2022. Его остаток при делении на 57  
(1) может увеличиться,  
(2) может остаться прежним,  
(3) может уменьшиться.
2. Запись натурального 2021-значного числа состоит только из цифр 2. Какой остаток даёт это число при делении на 444?
3. Какое наименьшее положительное число нужно прибавить к числу  $-2022$ , чтобы оно стало положительным, а его остаток при делении на 57 не изменился?
4. Натуральное число  $N$  при делении на 17 даёт остаток 13. Какой остаток при делении на 17 даёт число  $3N + 16$ ?
5. На какое минимальное число надо увеличить  $-2022$ , чтобы оно стало давать остаток 17 при делении на 19?
6. Натуральное число  $N$  при делении на 2022 даёт в остатке 2021. Какой остаток может давать  $N$  при делении на 4?
7. Леонид представил число 2023 в виде суммы двух натуральных слагаемых. Число 2023 при делении на разность этих слагаемых даёт тот же ненулевой остаток, что и при делении большего слагаемого на меньшее. Чему равно большее слагаемое?
8. Сегодня — пятница. Через 1 день будет суббота. Какой день недели будет через 2022 дня?
9. В ряд выписали все числа от 2000 до 2022: 200020012002...20212022. Какой остаток при делении на 75 даёт такое число?
10. Обычные часы имеют деления «1», «2», ..., «12». Минутная стрелка часов показывает на деление «2». Её повернули на 2021 деления против часовой стрелки. На какое деление она показывает теперь?
11. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 3, на 7 — остаток 5, на 8 — остаток 6, на 9 — остаток 4.
12. Числа 30, 45 и 65 при делении на натуральное число  $d$ , большее 1, дают соответственно остатки 2, 3 и 2. Найдите  $d$ .



13. Выписали всевозможные шестизначные числа, получаемые из числа 123456 перестановкой цифр. У каждого нашли остаток при делении на 18. Какие остатки могли получиться?
14. Числитель и знаменатель дроби, не превосходящей  $1/3$ , — целые положительные числа, дающие в сумме 2022. Укажите наибольший возможный числитель такой дроби.
15. Найдите наибольшее натуральное число, у которого при делении на 13 неполное частное меньше остатка.

## Блок 4. Делимость: остатки при делении

### Интернет-карусель (2021–2022)

#### Ответы и решения

- Натуральное число увеличили на 2022. Его остаток при делении на 57
  - может увеличиться,
  - может остаться прежним,
  - может уменьшиться.

Ответ: 1 и 3.

Решение. Поделим 2022 с остатком:  $2022 = 57 \cdot 35 + 27$ . Если число, например, давало остаток 1, то остаток станет 28 — увеличится. Если число, например, давало остаток 56, то остаток станет  $56 + 27 - 57 = 26$  — уменьшится.

Остаток не изменится, если прибавляют число, кратное 57. Но 2022 не делится на 57, поэтому утверждение (2) неверное.
- Запись натурального 2021-значного числа состоит только из цифр 2. Какой остаток даёт это число при делении на 444?
 

Ответ: 22.

Решение 1 (деление столбиком). Начнём делить число столбиком:

$$\begin{array}{r}
 22222222 \dots \mid 444 \\
 2220 \phantom{00000000} \mid 50005 \dots \\
 \hline
 222 \\
 2220 \\
 \hline
 \dots \\
 22
 \end{array}$$

Видно, что сносятся группы «222». Так как 2021 при делении на 3 даёт остаток 2, то в конце останется две цифры «2». Таким образом, остаток будет 22.

Решение 2 (близкое число, кратное 222). Число  $222\dots22200$ , в котором  $2021 - 2 = 2019$  цифр «2», кратно 444. Действительно, оно кратно 4 из-за окончания «00». Оно кратно 111, так как количество цифр «2» кратно трём.

Данное число больше на 22, поэтому оно даёт остаток 22.
- Какое наименьшее положительное число нужно прибавить к числу  $-2022$ , чтобы оно стало положительным, а его остаток при делении на 57 не изменился?

Ответ: 2052.

Решение. Надо прибавить наименьшее число, кратное 57, которое больше 2022. Так как  $2022 = 57 \cdot 35 + 27$ , то надо прибавить  $57 \cdot 36 = 2052$ .

- Натуральное число  $N$  при делении на 17 даёт остаток 13. Какой остаток при делении на 17 даёт число  $3N + 16$ ?
 

Ответ: 4.

Решение. Пусть  $N = 17d + 13$ . Тогда  $3N + 16 = 3(17d + 13) + 16 = 17(3d) + 55 = 17(3d + 3) + 4$ . Искомый остаток равен 4.
- На какое минимальное число надо увеличить  $-2022$ , чтобы оно стало давать остаток 17 при делении на 19?
 

Ответ: 6.

Решение. Заметим,  $-2022 = -107 \cdot 19 + 11$  — число  $-2022$  при делении на 19 даёт остаток 11. Не трудно заметить, что число надо увеличить на  $17 - 11 = 6$ .
- Натуральное число  $N$  при делении на 2022 даёт в остатке 2021. Какой остаток может давать  $N$  при делении на 4?
 

Ответ: 1 3

Решение. Из условия  $N = 2022d + 2021$  — оно нечётно. Поэтому может давать только нечётный остаток, то есть 1 или 3. Оба возможны. При  $d = 0$  получаем 2021, которое даёт остаток 1. При  $d = 1$  получаем 4043, которое даёт остаток 3.
- Леонид представил число 2023 в виде суммы двух натуральных слагаемых. Число 2023 при делении на разность этих слагаемых даёт тот же ненулевой остаток, что и при делении большего слагаемого на меньшее. Чему равно большее слагаемое?
 

Ответ: 1445.

Указание:  $2023 = 1445 + 578$ ,  $2023 : 867 = 2$  (ост. 289),  $1445 : 578 = 2$  (ост. 289).

Решение. Из условия число 2023 можно представить в виде  $2b + kb + r$ , где  $b$  — меньшее слагаемое,  $a = b(k + 1) + r$  — большее слагаемое ( $k \geq 0$  — целое),  $r$  — остаток, указанный в условии.

По условию  $2023 - r = 2b + kb$  должно быть кратно  $a - b = bk + r$ , значит, этому же числу кратна разность  $(2b + kb) - (bk + r) = 2b - r$ , которая меньше  $2b$ . Значит,  $bk + r \leq 2b$ , откуда  $k = 0$  или  $k = 1$ .

(1) Если  $k = 0$ , то 2023 раскладывалось на слагаемые  $(b + r)$  и  $b$ . Но 2023 не может при делении на разность слагаемых, равную  $r$ , давать остаток  $r$ .

(2) Если  $k = 1$ , то  $2b - r = kb + r = b + r$ . Отсюда  $b = 2r$ ,  $a = 2b + r = 5r$ ,  $a + b = 7r = 2023$ , откуда  $r = 2023 : 7 = 189$ . Больше слагаемое равно  $a = 5r = 1445$ .

8. Сегодня — пятница. Через 1 день будет суббота. Какой день недели будет через 2022 дня?

Ответ: четверг.

Решение. Поделим с остатком:  $2022 : 7 = 288$  (ост. 6). Каждый 7 дней снова будет пятница, а в конце через 6 дней будет четверг.

9. В ряд выписали все числа от 2000 до 2022: 200020012002...20212022. Какой остаток при делении на 75 даёт такое число?

Ответ: 47.

Решение. При делении на 25 число даёт остаток 22. Значит, при делении на 75 остаток 22,  $22 + 25 = 47$  или  $47 + 25 = 72$ .

Рассмотрим делимость на 3. Найдём сумму цифр чисел от 2000 до 2022: в разрядах тысяч сумма  $23 \cdot 2 = 46$ , сумма в разряде десятков равна  $10 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 16$ , в разрядах единиц —  $2 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) + 1 + 2 = 93$ ,  $46 + 16 + 93 = 155$ . Сумма цифр 155 при делении на 3 даёт остаток 2, значит, само число также даёт остаток 2.

Остаток при делении на 75 также должен давать остаток 2 при делении на 3. Из чисел 22, 47 и 72 подходит только 47.

10. Обычные часы имеют деления «1», «2», ..., «12». Минутная стрелка часов показывает на деление «2». Её повернули на 2021 деления против часовой стрелки. На какое деление она показывает теперь?

Ответ: 9.

Решение. Число 2021 при делении на 12 даёт в остатке 5. Поэтому, стрелка сдвинется на 5 делений против часовой стрелки и окажется на делении «9».

11. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 3, на 7 — остаток 5, на 8 — остаток 6, на 9 — остаток 4.

Ответ: 1678.

Указание: искомое число, увеличенное на 2, кратно 3, 5, 7, 8.

Решение. Пусть  $N$  — искомое число. Тогда  $N + 2$  кратно 5, 7 и 8. Число  $N + 2$  при делении на 9 даёт остаток 6, значит, оно кратно 3. Так как числа 3, 5, 7 и 8 взаимно простые, то число  $N + 2$  кратно  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$ .

Тогда минимальное возможное значение  $N = 840 - 2 = 838$ . Это число при делении на 9 даёт остаток 1 и не подходит.

Следующее значение —  $N = 2 \cdot 840 - 2 = 1678$  даёт остаток 4 и подходит.

12. Числа 30, 45 и 65 при делении на натуральное число  $d$ , большее 1, дают соответственно остатки 2, 3 и 2. Найдите  $d$ .

Ответ: 7.

Решение. Числа  $30 - 2 = 28$ ,  $45 - 3 = 42$ ,  $65 - 2 = 63$  должны быть кратны искомому делителю  $d$ . Так как НОД (28; 42; 63) = 7, то  $d = 7$  — единственное возможное значение.

13. Выписали всевозможные шестизначные числа, получаемые из числа 123456 перестановкой цифр. У каждого нашли остаток при делении на 18. Какие остатки могли получиться?

Ответ: 3 и 12.

Решение. Сумма цифр любого такого числа равна  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ . Как известно, любое число и сумма его цифр дают равные остатки при делении на 9. Поэтому любое указанное число при делении на 9 даёт тот же остаток, что и число 21, то есть остаток 3.

Рассмотрим число в виде  $18k + r$ , где  $r$  — остаток при делении на 18. Так как 18 также кратно 9, значит, остаток  $r$  при делении на 9 даёт остаток 3. Он может быть равен 3 или 12.

Оба варианта возможны: при делении на 18 число 123465 даёт остаток 3, число 123546 — остаток 12.

14. Числитель и знаменатель дроби, не превосходящей  $1/3$ , — целые положительные числа, дающие в сумме 2022. Укажите наибольший возможный числитель такой дроби.

Ответ: 505.

Решение. Числитель не более  $1/4$  от 2022, то есть не более 505. Заметим, что  $505/1517 < 1/3$ , а  $506/1516 > 1/3$ .

15. Найдите наибольшее натуральное число, у которого при делении на 13 неполное частное меньше остатка.

Ответ: 155.

Решение. Число имеет вид  $13d + r$ , где  $d < r < 13$ . Оно максимально при  $r = 12$ ,  $d = 11$ . Получаем  $11 \cdot 13 + 12 = 155$ .