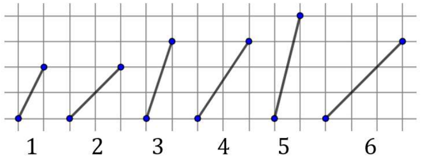
Блок 5. Площади и теорема Пифагора

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

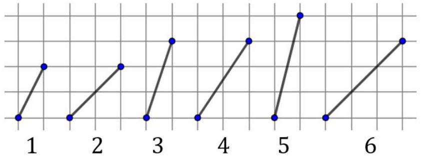
1. Точки K и L — середины сторон AB и AC треугольника ABC, точка M на стороне BC такова, что $BM = 3CM$. Найдите площадь треугольника KLM, если площадь треугольника ABC равна 720.

2. На рисунке показаны отрезки с концами в вершинах квадратной сетки.



Сколькими способами можно выбрать из них три разных отрезка, которые могут являться сторонами прямоугольного треугольника? При составлении треугольника отрезки можно располагать независимо от вершин клеток.

3. На рисунке показаны отрезки с концами в вершинах квадратной сетки.

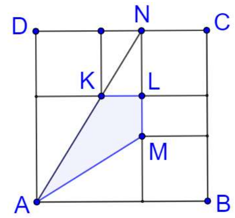


Сколькими способами можно выбрать из них три разных отрезка, которые могут являться сторонами тупоугольного треугольника? При составлении треугольника отрезки можно располагать независимо от вершин клеток.

4. На квадратной сетке построена окружность с центром в вершине клетки. Радиус равен $R = 5\sqrt{2}$. Сколько вершин клеток лежит на этой окружности?

5. Точки K, L, M, N — середины сторон четырёхугольника $ABCD$. Площадь $KLMN$ вдвое меньше площади $ABCD$, если
(1) $ABCD$ — прямоугольник;
(2) $ABCD$ — параллелограмм;
(3) $ABCD$ — любой выпуклый четырёхугольник;
(4) $ABCD$ — любой (выпуклый или невыпуклый) четырёхугольник.

6. В углах B, C, D квадрата $ABCD$ расположены равные квадраты площади 5, как показано на рисунке. Точки A, K, N лежат на одной прямой. Найдите площадь четырехугольника $AKLM$.

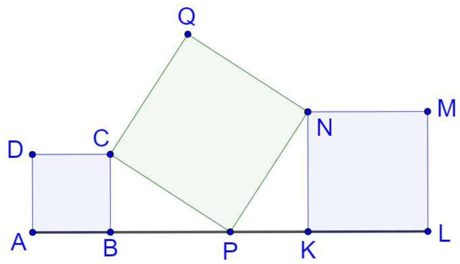


7. Точки M и N на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC таковы, что точка M лежит между точками A и N, угол MCN равен 45 градусов. Найдите длину MN, если $AM = 33$, $NB = 56$.

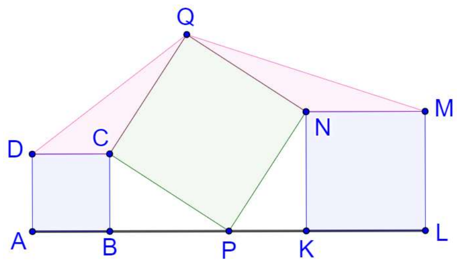
8. Дан четырехугольник $ABCD$; диагонали AC и BD перпендикулярны; $AB = 4$, $BC = 8$, $CD = 13$. Найдите AD.

9. Дан треугольник ABC, $AB^2 = 8$, $AC = 4$. На стороне BC нашлась такая точка K, что $BK = AK = 2$. Сколько градусов составляет величина угла BAC?

10. На отрезке AL отмечены точки B, P и K. Квадраты $ABCD$, $KLMN$ и $CPNQ$ расположены, как показано на рисунке. Площади квадратов $ABCD$ и $KLMN$ равны соответственно 20 и 37. Найдите площадь квадрата $CPNQ$.



11. На отрезке AL отмечены точки B, P и K. Квадраты $ABCD$, $KLMN$ и $CPNQ$ расположены, как показано на рисунке. Площади квадратов $ABCD$ и $KLMN$ равны соответственно 20 и 45. Найдите сумму площадей треугольников CDQ и MNQ.



12. Дан квадрат $ABCD$ площади 36. На стороне AB отметили точку E, на отрезке DE — точку F, на отрезке AF — точку G. Площади частей CDE, ADF, ABG и $BEFG$ равны. Найдите длину отрезка BG.

Блок 5. Площади и теорема Пифагора

Интернет-карусель (2021–2022)

Ответы, указания, решения

1. Точки K и L — середины сторон AB и AC треугольника ABC, точка M на стороне BC такова, что $BM = 3CM$. Найдите площадь треугольника KLM, если площадь треугольника ABC равна 720.

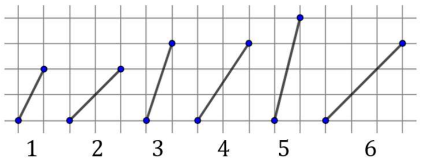
   Ответ: 180.

   Решение. Пусть точка N — середина стороны BC. Средние линии KL, LN и KN делят треугольник ABC на четыре равных.

   Значит, $S\,(KLN) = S\,(ABC) : 4 = 720 : 4 = 180$.

   Треугольники KLM и KLM имеют общую сторону KL. Высоты, опущенные на неё, равны (так как средняя линия KL параллельна стороне BC). Значит, треугольники KLM и KLN равновелики, $S\,(KLM) = 180$.

2. На рисунке показаны отрезки с концами в вершинах квадратной сетки.

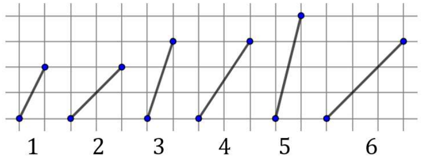


   Сколькими способами можно выбрать из них три разных отрезка, которые могут являться сторонами прямоугольного треугольника? При составлении треугольника отрезки можно располагать независимо от вершин клеток.

   Ответ: 3.

   Решение. Пусть длина стороны одной клетки равна 1. По теореме Пифагора квадраты длин данных отрезков равны 5, 8, 10, 13, 17 и 18. Прямоугольный треугольник можно сложить, если одно из полученных чисел равно сумме двух других. Перебором можно определить, что возможно только равенства 5 + 8 = 13 (отрезки с номерами 1, 2, 4), 5 + 13 = 18 (отрезки с номерами 1, 4, 6) и 8 + 10 = 18 (отрезки с номерами 2, 3, 6). Всего 3 варианта.

3. На рисунке показаны отрезки с концами в вершинах квадратной сетки.



   Сколькими способами можно выбрать из них три разных отрезка, которые могут являться сторонами тупоугольного треугольника? При составлении треугольника отрезки можно располагать независимо от вершин клеток.

   Ответ: 4.

   Решение. Пусть длина стороны одной клетки равна 1. По теореме Пифагора квадраты длин данных отрезков равны 5, 8, 10, 13, 17 и 18.

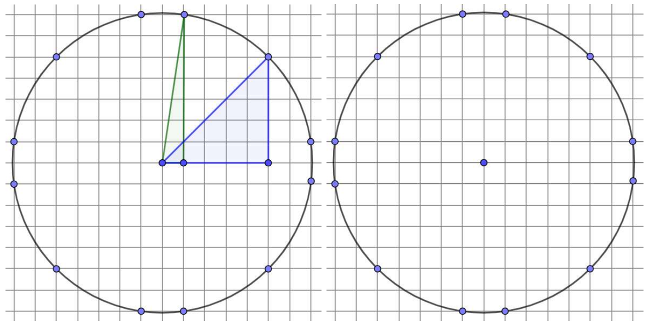
   Треугольник тупоугольный в том и только том случае, когда квадрат большей стороны превышает сумму квадратов двух других сторон. Перебором можно определить, что возможно только варианты 18-5-8, 18-5-10, 17-5-8, 17-5-10. Всего 4 варианта.

4. На квадратной сетке построена окружность с центром в вершине клетки. Радиус равен $R = 5\sqrt{2}$. Сколько вершин клеток лежит на этой окружности?

   Ответ: 12.

   Решение. Каждой точке соответствует прямоугольный треугольник с целыми длинами катетов, у которых гипотенуза равна $5\sqrt{2}$.

   Уравнение $a^2 + b^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50$ имеет только 3 решения $(a; b)$ в натуральных числах: $(1; 7)$, $(5; 5)$ и $(7; 1)$, что нетрудно показать перебором. Им соответствуют 12 точек, показанных на рисунке.



5. Точки K, L, M, N — середины сторон четырёхугольника $ABCD$. Площадь $KLMN$ вдвое меньше площади $ABCD$, если

(1) $ABCD$ — прямоугольник;
(2) $ABCD$ — параллелограмм;
(3) $ABCD$ — любой выпуклый четырёхугольник;
(4) $ABCD$ — любой (выпуклый или невыпуклый) четырёхугольник.

Ответ: 1, 2, 3 и 4.

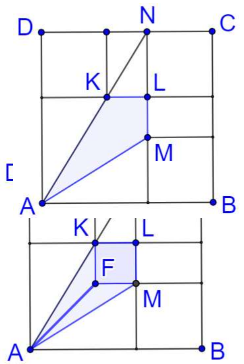
Решение. Утверждение верно для любого четырёхугольника. Докажем это.

Пусть точки K, L, M, N — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Одна из диагоналей четырёхугольника всегда внутри, пусть это BD.

Пусть h_1 и h_2 — длины высот треугольников ABD и CBD, опущенных на BD. Тогда $S\,(ABCD) = S\,(ABD) + S\,(CBD) = BD \cdot (h1 + h_2)/2$.

Отрезки KN и LM — средние линии треугольников ABD и CBD, они параллельны BD и равны $BD/2$. Значит, $KLMN$ — параллелограмм, его площадь равна произведению $KN = BD/2$ на расстояние между KN и LM. Расстояние между BD и KN равно $h_1/2$, между BD и LM — $h_2/2$. Тогда расстояние между KN и LM равно $h_1/2 + h_2/2$. Тогда $S\,(KLMN) = KN \cdot (h_1/2 + h_2/2) = BD \cdot (h1 + h_2)/4 = S\,(ABCD) : 2$, что и требовалось доказать.

6. В углах B, C, D квадрата $ABCD$ расположены равные квадраты площади 5, как показано на рисунке. Точки A, K, N лежат на одной прямой. Найдите площадь четырехугольника $AKLM$.



Ответ: 5.

Решение. Пусть длины сторон малых квадратов равны a, $KL = b$.

Треугольники ADN и KEN подобны, откуда $DN : NE = AD : KE$ или $(a + b) : b = (2a + b) : a$. После упрощения $a^2 = ab + b^2$.

Площадь $AKLM$ состоит из площади квадрата KLMF, равной b^2, и площадей треугольников AKF и AMF, у каждого из которых площади равна $ab/2$.

Тогда $S(AKLM) = b^2 + ab = a^2 = 5$.

7. Точки M и N на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC таковы, что точка M лежит между точками A и N, угол MCN равен 45 градусов. Найдите длину MN, если $AM = 33$, $NB = 56$.

Ответ: 65.

Решение. Так как $\angle ACM + \angle BCN = \angle MCN = 45°$, то существует такой луч CK, что $\angle ACM = \angle KCM$, $\angle BCN = \angle KCN$; пусть $CK = AC = BC$. Получаем равенства: $\Delta ACM = \Delta KCM$, $\Delta BCN = \Delta KCN$.

Так как $\angle CAM = \angle CKM = \angle CBN = \angle CKN = 45°$, то $\angle MKN = 90°$. При этом $BN = KN$, $AM = KM$. По теореме Пифагора для треугольника KMN получаем:

$MN^2 = KM^2 + KN^2 = AM^2 + BN^2 = 33^2 + 56^2 = 65^2$, $MN = 65$.

8. Дан четырехугольник $ABCD$; диагонали AC и BD перпендикулярны; $AB = 4$, $BC = 8$, $CD = 13$. Найдите AD.

Ответ: 11.

Решение. Если диагонали (выпуклого или невыпуклого) четырёхугольника перпендикулярны, то суммы квадратов его противоположных сторон равны. Из этого следует, что $AD^2 = AB^2 + CD^2 - BC^2 = 4^2 + 13^2 - 8^2 = 11^2$, $AD = 11$.

Комментарий. Данное в решении утверждение доказано в материалах к вводному занятию.

9. Дан треугольник ABC, $AB^2 = 8$, $AC = 4$. На стороне BC нашлась такая точка K, что $BK = AK = 2$. Сколько градусов составляет величина угла BAC?

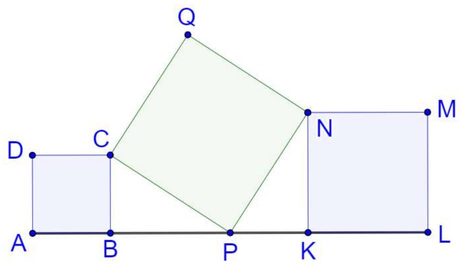
Ответ: 105.

Решение. Стороны треугольника ABK удовлетворяют соотношению $AK^2 + BK^2 = AB^2$, $AK = BK$. Значит, этот треугольник — прямоугольный и равнобедренный, $\angle BAK = 45°$.

Тогда треугольник AKC — прямоугольный, в нём $2AK = AC$. Значит, $\angle CAK = 60°$.

Получаем: $\angle BAC = \angle BAK + \angle CAK = 45° + 60° = 105°$.

10. На отрезке AL отмечены точки B, P и K. Квадраты $ABCD$, $KLMN$ и $CPNQ$ расположены, как показано на рисунке. Площади квадратов $ABCD$ и $KLMN$ равны соответственно 20 и 37. Найдите площадь квадрата $CPNQ$.



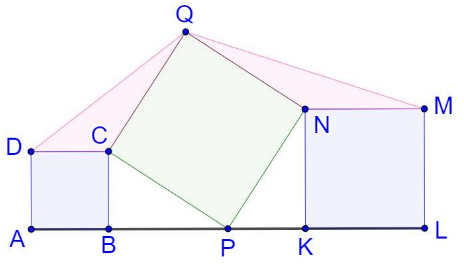
Ответ: 57.

Решение. Из рисунка видно, что $\angle BPC + \angle KPN = 90°$. Прямоугольные треугольники BPC и KNP равны — у них равные углы и равны гипотенузы.

Тогда в прямоугольном треугольнике BCP по теореме Пифагора получаем:

$S\,(CPNQ) = CP^2 = BC^2 + BP^2 = BC^2 + KN^2 = S\,(ABCD) + S\,(KLMN) = 20 + 37 = 57$.

11. На отрезке AL отмечены точки B, P и K. Квадраты $ABCD$, $KLMN$ и $CPNQ$ расположены, как показано на рисунке. Площади квадратов $ABCD$ и $KLMN$ равны соответственно 20 и 45. Найдите сумму площадей треугольников CDQ и MNQ.



Ответ: 30.

Решение. Из рисунка видно, что $\angle BPC + \angle KPN = 90°$. Прямоугольные треугольники BPC и KNP равны — у них равные углы и равны гипотенузы.

Пусть $AB = a$, $KL = b$. Тогда $BK = a + b$. Заметим, что расстояние от точки Q до прямой AL также равно $a + b$. Тогда высота треугольника CDQ, опущенная на CD, равна $(a + b) - a = b$; высота треугольника MNQ, опущенная на MN, равна $(a + b) - b = a$. Значит, площади указанных в условии треугольников равны $ab/2$, их сумма равна ab. Так как $a^2b^2 = 20 \cdot 45 = 30^2$, то $ab = 30$.

12. Дан квадрат $ABCD$ площади 36. На стороне AB отметили точку E, на отрезке DE — точку F, на отрезке AF — точку G. Площади частей CDE, ADF, ABG и $BEFG$ равны. Найдите длину отрезка BG.

Ответ: 5.

Решение. Сторона данного квадрата равна 6. Разобьем квадрат на квадратики со стороной 1, как показано на рисунке справа.