

Блок 14. Десятичная запись числа

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. С какой цифры начинается минимальное натуральное число, сумма цифр которого равна 2022?
2. Найдите все двузначные числа, которые в 7 раз больше своей суммы цифр.
3. Известно, что сумма двух натуральных чисел A и B равна 4069. Если к числу A приписать слева цифру 3, а в числе B отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны. Найдите число A .
4. Десятичная запись натурального числа N состоит только из нечётных цифр. При этом его можно представить в виде суммы таких трёхзначных (натуральных) чисел A и B , что если цифры числа A записать в обратном порядке, то получится запись числа B . Сколько таких чисел N ?
5. К шестизначному (натуральному) числу прибавили 3, в результате чего его последняя цифра уменьшилась. А на сколько она уменьшилась?
6. К некоторому числу прибавили 32, при этом, естественно, две последние цифры числа изменились.
Какие изменения возможны?
(1) Последняя цифра увеличилась на 2, а предпоследняя уменьшилась на 6.
(2) Последняя цифра уменьшилась на 8, а предпоследняя увеличилась на 4.
(3) Последняя цифра уменьшилась на 8, а предпоследняя уменьшилась на 7.
(4) Последняя цифра увеличилась на 2, а предпоследняя уменьшилась на 7.
(5) Последняя цифра уменьшилась на 8, а предпоследняя уменьшилась на 6.
7. На доске написано три различные цифры. Вася написал в тетради всевозможные двузначные числа, в записи которых есть только такие цифры. Сумма чисел в тетради равна 544. Какова сумма цифр, написанных на доске?
8. Найдите наибольшее семизначное (натуральное) число, у которого каждая цифра равна сумме каких-то двух цифр в других разрядах.
9. К числу прибавили его последнюю цифру и получили 836. Каким могло быть это число?
10. К пятизначному числу A , сумма цифр которого равна 3, прибавили некоторое двузначное число. Получилось пятизначное число B , сумма цифр которого равна 3. Сколько различных возможных значений B ?

11. К числу прибавили его последнюю цифру и получили 10004. Каким могло быть это число?
12. Сумма двух трехзначных чисел равна 553. У каждого из слагаемых поменяли местами две последние цифры. Какие из указанных сумм не могли получиться в результате?
Варианты: (1) 635, (2) 535, (3) 445, (4) 544.
13. В числах 256 и 710 выбрали по одной цифре и поменяли их местами друг с другом. При этом сумма чисел увеличилась. На сколько?
14. На шести карточках написаны 6 различных цифр. Из них составили два трехзначных числа, причем последняя цифра первого числа в 3 раза больше первой цифры второго числа. Полученные числа сложили. Какая наибольшая сумма могла получиться?
15. Из натурального числа вычли его сумму цифр и получили число 2709. Каким могло быть это натуральное число, если в его записи используется только 2 различные цифры?

Блок 14. Десятичная запись числа

Интернет-карусель (2021–2022)

Ответы, указания и решения

1. С какой цифры начинается минимальное натуральное число, сумма цифр которого равна 2022?

Ответ: 6.

Решение. Так как $2022 : 9 = 224$ (ост. 6), то наименьшее количество разрядов в таком числе — 225, а само наименьшее число 699...99.

2. Найдите все двузначные числа, которые в 7 раз больше своей суммы цифр.

Ответ: 21, 42, 63 и 84.

Решение. Пусть искомое число имеет вид \overline{xy} . Из условия $10x + y = 7(x + y)$, откуда $x = 2y$. Значит, цифра десятков вдвое больше цифры единиц, это числа 21, 42, 63 и 84.

3. Известно, что сумма двух натуральных чисел A и B равна 4069. Если к числу A приписать слева цифру 3, а в числе B отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны. Найдите число A .

Ответ: 97.

Указание: $97 + 3972 = 4069$.

Решение. Из условия $B = \overline{3A2}$. Получаем:

$$A + B = A + (30 \dots 0 + 10A + 2) = 30 \dots 0 + 11A + 2 = 4069.$$

Первое слагаемое может быть только 3000, откуда $11A + 2 = 1069$, $11A = 1067$, $A = 97$.

4. Десятичная запись натурального числа N состоит только из нечётных цифр. При этом его можно представить в виде суммы таких трёхзначных (натуральных) чисел A и B , что если цифры числа A записать в обратном порядке, то получится запись числа B . Сколько таких чисел N ?

Ответ: 20.

Решение. Если $A = \overline{x\overline{yz}}$, то $B = \overline{zy\overline{x}}$. Сумма $\overline{x\overline{yz}} + \overline{zy\overline{x}}$ состоит из нечётных цифр.

Чтобы цифра единиц в сумме была нечётной, сумма $x + z$ должна быть нечётной.

Чтобы цифра десятков была нечётной, должен быть перенос из разряда единиц. Значит, $x + z$ — нечётное число, большее 10.

Чтобы цифра в разряде сотен была нечётной, переноса из разряда десятков быть не должно, значит, $2y$ не более 8.

Есть 4 возможных значения суммы $x + z$ — это 11, 13, 15 и 17. Цифра y — это 0, 1, 2, 3 или 4 (5 вариантов). Всего $4 \cdot 5 = 20$ вариантов.

Нужно показать, что указанные 20 вариантов дают разные значения суммы. Сумма равна $\overline{x\overline{yz}} + \overline{zy\overline{x}} = 101(x + z) + 20y$. Значение $20y$ от 0 до 80, а увеличение $x + z$ на 2 увеличивает сумму на 202, что более 80. Значит, все 20 значений суммы будут различны.

Замечание. Все 20 значений суммы таковы: 1111, 1131, 1151, 1171, 1191, 1313, 1333, 1353, 1373, 1393, 1515, 1535, 1555, 1575, 1595, 1717, 1737, 1757, 1777, 1797.

5. К шестизначному (натуральному) числу прибавили 3, в результате чего его последняя цифра уменьшилась. А на сколько она уменьшилась?

Ответ: 7.

Решение. Если была последняя цифра a , то стала $a + 3 - 10 = a - 7$. Она уменьшилась на 7.

6. К некоторому числу прибавили 32, при этом, естественно, две последние цифры числа изменились.

Какие изменения возможны?

- (1) Последняя цифра увеличилась на 2, а предпоследняя уменьшилась на 6.
- (2) Последняя цифра уменьшилась на 8, а предпоследняя увеличилась на 4.
- (3) Последняя цифра уменьшилась на 8, а предпоследняя уменьшилась на 7.
- (4) Последняя цифра увеличилась на 2, а предпоследняя уменьшилась на 7.
- (5) Последняя цифра уменьшилась на 8, а предпоследняя уменьшилась на 6.

Ответ: 2, 4 и 5

Решение. Рассмотрим каждый из вариантов.

- (1) Число изменилось на $2 - 60$ и еще, возможно, на несколько сотен. Тогда $2 - 60 - 32 = -90$ — это несколько полных сотен, что не так.
- (2) Такое возможно, например $129 + 32 = 161$.
- (3) Число изменилось на $-8 - 70$ и еще, возможно, на несколько сотен. Тогда $-8 - 70 - 32 = -110$ — это несколько полных сотен, что не так.
- (4) Такое возможно, например $190 + 32 = 222$.
- (5) Такое возможно, например $199 + 32 = 231$.

7. На доске написано три различные цифры. Вася написал в тетради всевозможные двузначные числа, в записи которых есть только такие цифры. Сумма чисел в тетради равна 544. Какова сумма цифр, написанных на доске?

Ответ: 17.

Указание: 80, 90, 89, 98, 88, 99, сумма 544.

Решение. Если на доске были написаны цифры a, b, c , отличные от нуля, то Вася составил числа $\overline{aa}, \overline{bb}, \overline{cc}, \overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc}, \overline{ba}, \overline{ca}, \overline{cb}$. Их сумма равна $33(a + b + c)$. Так как 544 не кратно 33, то среди цифр есть ноль.

Если на доске цифры a, b и 0, то Вася составил числа $\overline{aa}, \overline{bb}, \overline{ab}, \overline{a0}, \overline{b0}, \overline{ba}$. Их сумма равна $32(a + b) = 544, a + b = 17$. Значит, искомая сумма равна 17.

Если среди цифр два нуля, то будет только одно двузначное число, оно не равно 544.

8. Найдите наибольшее семизначное (натуральное) число, у которого каждая цифра равна сумме каких-то двух цифр в других разрядах.

Ответ: 9999000.

Решение. Наименьшая цифра — ноль, иначе она не будет равна сумме двух других цифр. Если ноль равен сумме двух цифр в двух других разрядах, то нулей не менее трёх. Остальные цифры могут быть девятками. Максимальное число 9999000.

Комментарий. Какое минимальное такое число? Аналогично, в числе не менее трёх нулей. Остальные цифры могут быть единицами. Наименьшее число — 1000111.

9. К числу прибавили его последнюю цифру и получили 836. Каким могло быть это число?

Ответ: 828 или 833.

Решение. Если сумма 836 оканчивается на 6, то само число оканчивается на $6 : 2 = 3$ или $16 : 2 = 8$. Искомое число — это $836 - 3 = 833$ или $836 - 8 = 828$.

10. К пятизначному числу A , сумма цифр которого равна 3, прибавили некоторое двузначное число. Получилось пятизначное число B , сумма цифр которого равна 3. Сколько различных возможных значений B ?

Ответ: 6.

Решение. Число A не может оканчиваться на «00», иначе после прибавления двузначного числа сумма цифр увеличится. Значит, оно оканчивается на «01», «10», «02», «20» или «11».

Рассмотрим, как могли измениться последние три цифры после увеличения на двузначное число:

001 → 100 или 101 → 200 — увеличение на 99,

010 → 100 или 110 → 200 — увеличение на 90,

002 → 101 — увеличение на 99,

002 → 020 — увеличение на 18,

020 → 110 — увеличение на 90,

020 → 101 — увеличение на 81,

011 → 110 — увеличение на 99,

011 → 101 — увеличение на 90.

Возможные сочетания трёх последних цифр числа B — это «020», «100», «101», «110», «200». Число B может быть равно 10101, 10110, 10020, 10200, 11100, 20100. Всего 6 значений.

11. К числу прибавили его последнюю цифру и получили 10004. Каким могло быть это число?

Ответ: 9997 или 10002.

Решение. Если сумма 10004 оканчивается на 4, то само число оканчивается на $4 : 2 = 2$ или $14 : 2 = 7$. Искомое число $10004 - 2 = 10002$ или $10004 - 2 = 10002$.

12. Сумма двух трехзначных чисел равна 553. У каждого из слагаемых поменяли местами две последние цифры. Какие из указанных сумм не могли получиться в результате?

Варианты: (1) 635, (2) 535, (3) 445, (4) 544.

Ответ: 1.

Решение. Пусть сумма цифр в разряде сотен равна a , в разряде десятков — b , в разряде единиц — c . Тогда сумма сначала была $100a + 10b + c = 553$, а стала равной $100a + 10c + b$. Она увеличилась на $9(c - b)$.

По сравнению с 553 указанные числа (1) больше на 82, (2) меньше на 18, (3) меньше на 108, (4) меньше на 9.

Вариант (1) невозможен, так как 82 не кратно 9.

В варианте (2) $b - c = 18 : 9 = 2$. Если $a = 5$, то $10b + c = 53, b = 5, c = 3$. Например, $222 + 331 = 553, 222 + 313 = 535$.

В варианте (3) $b - c = 108 : 9 = 12$. Если $a = 4$, то $10b + c = 153, 11b = 165$, откуда $b = 15, c = 3$. Например, $272 + 281 = 553, 227 + 218 = 445$.

В варианте (4) $b - c = 9 : 9 = 1$. Если $a = 4$, то $10b + c = 153, 11b = 154$, откуда $b = 14, c = 13$. Например, $389 + 164 = 553, 398 + 146 = 544$.

Комментарий. Интересно поставить вопрос перед учениками, можно ли получить какую-то сумму, отличную от 535, 445 и 544. Ответ: можно. Например, $326 + 227 = 553$, $362 + 272 = 634$.

13. В числах 256 и 710 выбрали по одной цифре и поменяли их местами друг с другом. При этом сумма чисел увеличилась. На сколько?

Ответ: 45.

Решение. Поменяли цифры в разных разрядах, иначе сумма не изменится.

$$256 + 710 \rightarrow 156 + 720 \text{ — уменьшилась}$$

$$256 + 710 \rightarrow 276 + 510 \text{ — уменьшилась}$$

$$256 + 710 \rightarrow 506 + 715 \text{ — уменьшилась}$$

$$256 + 710 \rightarrow 257 + 610 \text{ — уменьшилась}$$

$$256 + 710 \rightarrow 251 + 760 \text{ — увеличилась с } 966 \text{ до } 1011 \text{ на } 45.$$

14. На шести карточках написаны 6 различных цифр. Из них составили два трехзначных числа, причем последняя цифра первого числа в 3 раза больше первой цифры второго числа. Полученные числа сложили. Какая наибольшая сумма могла получиться?

Ответ: 1261.

Решение. Пусть получили числа \overline{abf} и \overline{cde} . Из условия $f = 3c$. Тогда сумма равна $(100a + 10b + 3c) + (100c + 10d + e) = 103c + 100a + 10b + 10d + e$.

Заметим, цифра c не более 3. Если подставить цифру c в сумму, то остальные цифры a, b, d, e надо сделать наибольшими в порядке убывания.

(1) Если $c = 3$, то нельзя использовать цифру 9 (это цифра f).

$$\text{Получаем: } 103 \cdot 3 + 100 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 10 \cdot 6 + 5 = 1244.$$

(2) Если $c = 2$, то нельзя использовать цифру 6 (это цифра f).

$$\text{Получаем: } 103 \cdot 2 + 100 \cdot 9 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 5 = 1261.$$

(3) Если $c = 1$, то в предыдущем случае нужно заменить значение c с 2 на 1, от этого сумма уменьшится.

Вывод: наибольшая сумма равна 1261.

15. Из натурального числа вычли его сумму цифр и получили число 2709. Каким могло быть это натуральное число, если в его записи используется только 2 различные цифры?

Ответ: 2722 или 2727.

Решение. Пусть искомое число \overline{abcd} .

Из условия получаем $(1000a + 100b + 10c + d) - (a + b + c + d) = 2709$, откуда $999a + 99b + 9c = 2709$, $111a + 11b + c = 301$.

Так как $11b + c$ не более $11 \cdot 9 + 9 = 108$, то $111a$ не менее $301 - 108 = 197$ и не более 301, то есть $a = 2$. Тогда $11b + c = 301 - 222 = 79$. Не трудно понять, что $b = 7, c = 2$.

Искомое число $\overline{272d}$. Так как в его записи используется только 2 различные цифры, то само число 2722 или 2727.