

Блок 6. Вероятность и статистика

Интернет-карусель (2021–2022)

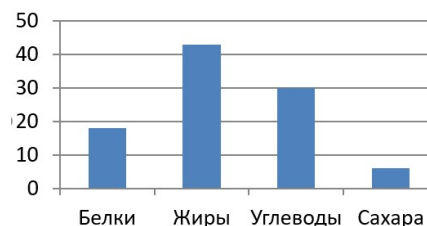
Задания

- Среднее значение.** Набор данных состоит из 115 подряд идущих натуральных чисел. Из среднее арифметическое равно 213. Найдите меньшее из чисел набора.
- В таблице приведена статистика по итогам проверки заданий олимпиады. За каждую задачу каждому участнику было начислено 0, 1, 2 или 3 балла. В таблице для каждой задачи и количества баллов было указано, сколько человек за эту задачу заработали это количество баллов. Некоторые числа утерялись. Чему равна сумма этих потерянных чисел?

Задача	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла
№ 1	2	17	38	55
№ 2	12	20	35	
№ 3	17	18		
№ 4	20			10
№ 5			8	4
Итого	81	157	174	148

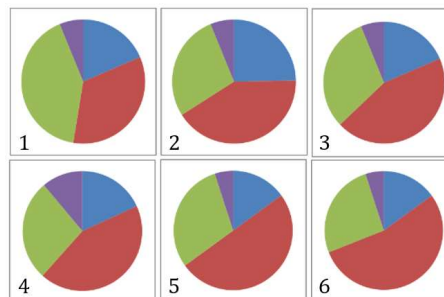
- Медиана.** Набор данных состоит из 100 подряд идущих натуральных чисел. Медиана набора равна 213,5. Найдите меньшее из чисел набора.
- Медиана.** Набор данных состоит из всех натуральных делителей числа 1368. Чему равна медиана данного набора?
- Среднее значение.** Среднее арифметическое первого набора чисел равно 12, среднее арифметическое второго набора чисел равно 17. Когда наборы объединили, то получили набор из 30 чисел, среднее арифметическое которого равно 15. Сколько было чисел в первом наборе?
- Среднее значение.** В ряд выписано 6 чисел. Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Среднее арифметическое всех шести чисел равно 28. Чему может быть равно пятое число?
- Размах.** В ряд выписано 6 натуральных чисел. Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Среднее арифметическое всех шести чисел равно 28. Какое наибольшее значение может иметь размах данного набора чисел?

- Среднее значение и медиана.** Набор данных состоит из 9 чисел — это 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 10 и еще некоторое число a . Известно, что среднее арифметическое всех десяти чисел равно их медиане. Чему может быть равно число a ?
- Размах набора из 10 натуральных чисел равен 10. Какое наименьшее значение может иметь среднее арифметическое этого набора?
- Набор данных состоит из 9 чисел. Их среднее арифметическое — в 2 раза, а размах — в 9 раз больше меньшего из них. Найдите отношение моды набора к его медиане.
- Среднее и размах.** Пять чисел 12, 24, 28, 36 и 40 выписаны в ряд на доске. Рассматривают наборы чисел: первые 2 числа ряда, первые 3 числа, все числа без последнего, все 5 чисел. Оказалось, что в каждом из этих 4 наборов среднее арифметическое чисел было равно их размаху. Какое число в ряду стоит последним?
- На гистограмме показан энергетический состав ореха кешью.



На какой из круговых диаграмм показан тот же состав?

- Белки
- Жиры
- Углеводы
- Сахара





13. Набор данных состоит из 7 натуральных чисел. Мода набора — три числа, одно из этих чисел является средним арифметическим набора. Каков минимальный возможный размах такого ряда?
14. **Медиана.** Дан набор чисел. Среди них нет равных. Каждое число — квадрат или куб натурального числа от 1 до 20. Найдите медиану этого набора.
15. Антон выписывает на доску числа. После каждого выписанного числа Антон считает среднее арифметическое всех выписанных на данный момент чисел. Оказалось, каждое среднее, начиная со второго, на 5 больше предыдущего. На сколько 10-е выписанное Антоном число больше первого?



Блок 6. Вероятность и статистика

Интернет-карусель (2021–2022)

Ответы, указания, решения

1. **Среднее значение.** Набор данных состоит из 115 подряд идущих натуральных чисел. Из среднее арифметическое равно 213. Найдите меньшее из чисел набора.

Ответ: 156.

Указание. Это числа от 156 до 270.

Решение. Всего $115 = 57 + 1 + 57$ чисел. Пусть среднее из них (58-е) равно n . Среднее арифметическое всех чисел равно n .

Действительно, остальные числа разбиваются на 57 пар: 1-е и 115-е, 2-е и 114-е, ..., 56-е и 58-е. Сумма чисел в каждой паре равна $2n$. Значит, сумма всех чисел равна $57 \cdot 2n + n = 115n$, среднее равно $115n : 115 = n$.

Тогда из условия $n = 213$, первое число равно $213 - 57 = 156$.

2. В таблице приведена статистика по итогам проверки заданий олимпиады. За каждую задачу каждому участнику было начислено 0, 1, 2 или 3 балла. В таблице для каждой задачи и количества баллов было указано, сколько человек за эту задачу заработали это количество баллов. Некоторые числа утерялись. Чему равна сумма этих потерянных чисел?

Задача	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла
№ 1	2	17	38	55
№ 2	12	20	35	
№ 3	17	18		
№ 4	20			10
№ 5			8	4
Итого	81	157	174	148

Ответ: 302.

Указание. Достаточно сложить суммы по столбцам и вычесть из неё оставшиеся в таблице числа.

Можно также восстановить все числа таблицы. Суммы чисел во всех строках одинаковы — они равны количеству участников олимпиады. Если найти эту сумму в первой строке, то можно восстановить число во второй строке. Далее аналогично восстанавливаются остальные числа. Результат показан на рисунке ниже.

Задача	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла	
№ 1	2	17	38	55	112
№ 2	12	20	35	45	112
№ 3	17	18	43	34	112
№ 4	20	32	50	10	112
№ 5	30	70	8	4	112
Итого	81	157	174	148	

3. **Медиана.** Набор данных состоит из 100 подряд идущих натуральных чисел. Медиана набора равна 213,5. Найдите меньшее из чисел набора.

Ответ: 164

Указание. Числа от 164 до 263.

Решение. Так как медиана набора равна 213,5, то 50-е и 51-е числа — это 213 и 214. Значит, первое число равно $213 - 49 = 164$.

4. **Медиана.** Набор данных состоит из всех натуральных делителей числа 1368. Чему равна медиана данного набора?

Ответ: 37.

Решение. Заметим, что $1368 = 36 \cdot 38$. В любом другом разложении на два множителя один множитель будет менее 36, а другой — более 38. Значит, медиана данного набора данных равна $(36 + 38) : 2 = 37$.

Замечание. Делители числа 1368: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 19, 24, 36, 38, 57, 72, 76, 114, 152, 171, 228, 342, 456, 684, 1368.

5. **Среднее значение.** Среднее арифметическое первого набора чисел равно 12, среднее арифметическое второго набора чисел равно 17. Когда наборы объединили, то получили набор из 30 чисел, среднее арифметическое которого равно 15. Сколько было чисел в первом наборе?

Ответ: 12.

Решение. Пусть в первом наборе было n чисел, во втором — $30 - n$ чисел. Суммы чисел наборов равны $12n$ и $17(30 - n)$, сумма всех чисел — $15 \cdot 30$. Получаем уравнение $15 \cdot 30 = 12n + 17(30 - n)$, из которого $n = 12$.

6. **Среднее значение.** В ряд выписано 6 чисел. Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Среднее арифметическое всех шести чисел равно 28. Чему может быть равно пятое число?

Ответ: 42.

Решение. Если первые числа набора равны a и b , то набор состоит из чисел $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b$. Из суммы равна $8a + 12b$ или $28 \cdot 6$. Пятое число равно $2a + 3b = (8a + 12b)/4 = 28 \cdot 6/4 = 42$.

7. **Размах.** В ряд выписано 6 натуральных чисел. Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Среднее арифметическое всех шести чисел равно 28. Какое наибольшее значение может иметь размах данного набора чисел?

Ответ: 66.

Решение. Если первые числа набора равны a и b , то набор состоит из чисел $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b$. Из суммы равна $8a + 12b$ или $28 \cdot 6$, откуда $2a + 3b = 42$. Размах равен $(3a + 5b) - a = (2a + 3b) + 2b = 42 + 2b$.

Размах наибольший при максимальном возможном значении b . Из равенства $2a + 3b = 42$ следует, что $3b < 42$, b — чётное (так как 42 и $2a$ — чётные, 3 — нечётное). Получаем, что при $b < 14$ максимально возможное значение равно $b = 12$. Тогда размах равен $42 + 2 \cdot 12 = 66$.

8. **Среднее значение и медиана.** Набор данных состоит из 9 чисел — это 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 10 и еще некоторое число a . Известно, что среднее арифметическое всех десяти чисел равно их медиане. Чему может быть равно число a ?

Ответ: 3, 5, 13.

Решение. Сумма данных 9 чисел равна 52.

Если $a \leq 5$, то медиана набора — среднее между 5 и 6, она равна 5,5. Тогда сумма чисел набора равна $5,5 \cdot 10 = 55$, $a = 55 - 52 = 3$.

Если $a \geq 7$, то медиана набора — среднее между 6 и 7, она равна 6,5. Тогда сумма чисел набора равна $6,5 \cdot 10 = 65$, $a = 65 - 52 = 13$.

Если $5 < a < 7$, то медиана набора — среднее между 6 и a , она равна $3 + a/2$. Тогда сумма набора равна $10(3 + a/2) = 52 + a$, $a = 5,5$.

9. Размах набора из 10 натуральных чисел равен 10. Какое наименьшее значение может иметь среднее арифметическое этого набора?

Ответ: 2.

Решение. Если наименьшее число набора не равно 1, то все числа можно уменьшить на одну величину, чтобы меньшее стало равным 1. Тогда размах не изменится, а среднее арифметическое уменьшится.

Если меньшее число равно 1, то наибольшее равно 11. Сумма чисел наименьшая, если набор состоит из девяти чисел 1 и числа 11. Среднее арифметическое при этом равно $(9 + 11) : 10 = 2$.

10. Набор данных состоит из 9 чисел. Их среднее арифметическое — в 2 раза, а размах — в 9 раз больше меньшего из них. Найдите отношение моды набора к его медиане.

Ответ 1.

Решение. Пусть a — меньшее, b — большее из данных чисел. S — сумма всех чисел набора. Из условия $S/9 = 2a$, $b - a = 9a$, откуда $S = 18a$, $b = 10a$. Значит, данный набор таков: $a; a; a; a; a; a; a; a; 10a$. Его мода — число a , медиана тоже равна a , искомое отношение равно 1.

11. **Среднее и размах.** Пять чисел 12, 24, 28, 36 и 40 выписаны в ряд на доске. Рассматривают наборы чисел: первые 2 числа ряда, первые 3 числа, все числа без последнего, все 5 чисел. Оказалось, что в каждом из этих 4 наборов среднее арифметическое чисел было равно их размаху. Какое число в ряду стоит последним?

Ответ: 28.

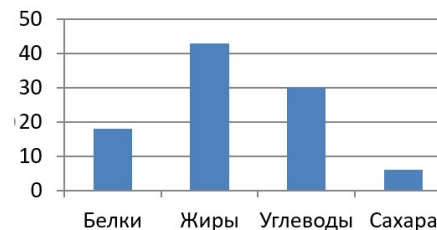
Решение. Пусть первые два числа — a и b ($a \leq b$). Их среднее равно размаху, поэтому $(a + b)/2 = b - a$, откуда $a + b = 2b - 2a$, $3a = b$. Из данных чисел в 3 раза отличаются только 12 и 36, поэтому первые два числа именно они.

Если третье число t на доске больше 36, то $(12 + 36 + t)/3 = t - 12$, $t = 42$, что невозможно.

Если третье число t на доске меньше 36, то $(12 + 36 + t)/3 = 36 - 12$, $t = 24$.

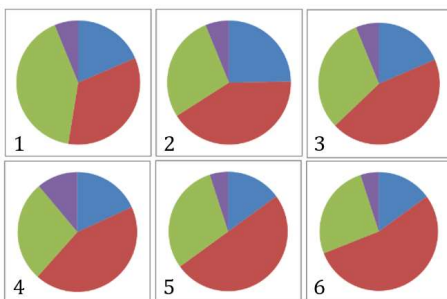
Значит, последовательность 12, 36, 24, 28, 40 или 12, 36, 24, 40, 28. Не трудно проверить, что подходит только второй вариант.

12. На гистограмме показан энергетический состав ореха кешью.



На какой из круговых диаграмм показан тот же состав?

- Белки
- Жиры
- Углеводы
- Сахара



Ответ: 3.

Указание. Всего данные 4 элемента, судя по гистограмме, вместе составляют около 95 единиц. Значит, жиры — немного меньше половины. Тогда отсекаются диаграммы № 5 и № 6. Диаграмма № 1 не подходит, так как на ней поровну жиров и углеводов. Углеводов больше четверти (30 из около 95), поэтому не подходят диаграммы № 2 и № 4. Остается один вариант — диаграмма № 3.

13. Набор данных состоит из 7 натуральных чисел. Мода набора — три числа, одно из этих чисел является средним арифметическим набора. Каков минимальный возможный размах такого ряда?

Ответ: 4.

Решение. Числа, попавшие в моду, встречаются по 2 раза. Действительно, если бы такие числа входили по 1 разу, то в моду вошли все 7 чисел. Если в бы такие числа входили не менее чем 3 раза, то общее количество чисел не менее $3 \cdot 3 = 9$, что противоречит условию.

Значит, набор выглядит так: $a; a; b; b; c; c; d$, где $a < b < c < d$ нет равных. При уменьшении всех чисел на одну и ту же величину условие задачи не меняется, поэтому можно считать, что $a = 1$.

Среднее набора 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5 равно $21 : 7 = 3$, он подходит под условия задачи. Если размах менее $5 - 1 = 4$, то наибольшее число не более 4. Такой набор один — 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, он не подходит под условие задачи (его среднее не равно 1, 2 или 3).

14. **Медиана.** Дан набор чисел. Среди них нет равных. Каждое число — квадрат или куб натурального числа от 1 до 20. Найдите медиану этого набора.

Ответ: 240,5.

Указание. Выпишем все кубы и квадраты. Число n^2 совпадёт с n^3 , если число n — куб. Значит, совпадают только квадраты чисел 1 и 8 — это 1 и 64. В наборе остается 38 чисел. Два числа в середине списка — 225 и 256, их среднее — 240,5.

15. Антон выписывает на доску числа. После каждого выписанного числа Антон считает среднее арифметическое всех выписанных на данный момент чисел. Оказалось, каждое среднее, начиная со второго, на 5 больше предыдущего. На сколько 10-е выписанное Антоном число больше первого?

Ответ: 90.

Решение. Пусть в какой-то момент на доске написано k чисел, среднее арифметическое которых равно m . Тогда сумма всех чисел на доске равна mk .

Когда добавили новое число, стало $k + 1$ число, их среднее равно $m + 5$. Значит, добавили число $(k + 1)(m + 5) - km = m + 5k + 5$.

Когда добавили следующее число, стало $k + 2$ числа, среднее арифметическое которых равно $m + 10$. Значит, добавили число $(k + 2)(m + 10) - (k + 1)(m + 5) = m + 5k + 15$.

Второй раз добавили число большее на $(m + 5k + 15) - (m + 5k + 5) = 10$. Таким образом, каждое следующее число на 10 больше предыдущего. Тогда 10-е число должно быть на 90 больше первого.