Блок 6. Множества

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. Даны три подмножества множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:
 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$,
 $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$,
 $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

 Найдите сумму элементов множества $A \cap (B \cup C)$.

2. На доске написаны числа. Каждое — двузначное или трехзначное. Среди них ровно 15 двузначных чисел, ровно 25 трехзначных и ровно 17 четных чисел. Сколько на доске нечетных чисел?

3. Даны три подмножества множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:
 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$,
 $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$,
 $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

 Найдите сумму элементов множества $\overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C}$.

4. В 8 «М» классе 27 учеников. Они принимали участие в четырёх интернет-каруселях, каждый — хотя бы в одной. В каждой карусели играли 15 человек. При этом 12 человек играли только один раз, остальные — 3 или 4 раза. Сколько играли 4 раза?

5. Даны три подмножества множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:
 $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$,
 $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$,
 $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

 Петя пишет выражение, содержащее A, B, C и операции объединения двух множеств, пересечения двух множеств или дополнения к множеству.

 Например, $A \cap (B \cup C)$ или $\overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C}$.

 Для каждого выражения он находит соответствующее ему множество. Какое наибольшее количество разных множеств может получить таким образом Петя?

6. Какие из соотношений верны для любых множеств A, B и C?

 (1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 (3) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 (4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2021–2022 учебный год

7. Рассмотрим следующие подмножества множества всех четырёхугольников.
 A = {две стороны равны и две другие стороны равны}
 B = {диагонали перпендикулярны}
 C = {одна диагональ делит другую пополам}

 Какие из утверждений являются верными?
 (1) A — подмножество B.
 (2) C — подмножество B.
 (3) C — подмножество A.
 (4) Пересечение B и C равно A.
 (5) Пересечение B и C — множество всех параллелограммов.

8. Экспериментаторы собрали фокус-группу и предложили каждому участнику две таблетки: красную и синюю.

 После этого были посчитаны четыре количества:
 (1) количество съевших красную таблетку,
 (2) количество съевших только одну таблетку,
 (3) количество съевших хотя бы одну таблетку,
 (4) количество съевших обе таблетки.

 Все они оказались разными. Какое количество самое большое?

9. Сколько существует чисел от 1 до 2020, у которых количество четных делителей равно количеству нечетных?

10. Рассмотрим множество треугольников, у которых длины всех сторон — натуральные числа. Пусть A — подмножество из треугольников с периметром 2019, B — подмножество с периметром 2022. На сколько количество элементов во множестве A меньше количества элементов во множестве B?

11. Рассмотрим множество треугольников, у которых длины всех сторон — натуральные числа. Пусть A — подмножество из треугольников с периметром 2022, B — подмножество с периметром 2025. На сколько количество элементов во множестве A меньше количества элементов во множестве B?

12. На инопланетный конгресс собрались 25 инопланетян. Ровно у 8 из них количество глаз равно количеству ушей, а ровно у 13 из них количество глаз не равно количеству ртов. Найдите минимально возможное число инопланетян, у которых количество ушей не равно количеству ртов.

13. Про подмножества A, B, C множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9} известно, следующее:

 $A \cap B = \{1; 2\}$,
 $B \cap C = \{3; 7\}$,
 $A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$,
 $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$.

Найдите сумму чисел, входящих в A.

14. Пусть A — множество всех натуральных чисел от 1 до 2022, A_n — множество натуральных чисел, кратных n. Сколько чисел содержит множество

    $(A\backslash A_2)\cup(A\backslash A_3)\cup(A\backslash A_4)\cup(A\backslash A_5)\cup(A\backslash A_6)\cup(A\backslash A_7)$?

15. В классе 24 ученика. Все мальчики в классе почему-то не умеют писать цифру 2 и просто пропускают ее при письме, а девочки почему-то не знают цифру 3 и тоже ее пропускают. Однажды учительница попросила треть детей написать число 241, треть — число 341, а остальных — число 2341. Оказалось, что число 241 было написано 10 раз, а число 341 — 12 раз. Сколько детей верно выполнили задание учительницы?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2021–2022 учебный год

Блок 6. Множества

Интернет-карусель (2021–2022)

Ответы, решения, указания

1. Даны три подмножества множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:
A = {1; 2; 3; 4; 5},
B = {3; 4; 5; 6; 7},
C = {1; 3; 5; 7; 9}.

Найдите сумму элементов множества $A \cap (B \cup C)$.

Ответ: 13.

Решение. Объединение множеств B и C — {1; 3; 4; 5; 6; 7; 9}, множество A пересекается с ним по множеству {1; 3; 4; 5}. Искомая сумма 13.

2. На доске написаны числа. Каждое — двузначное или трехзначное. Среди них ровно 15 двузначных чисел, ровно 25 трехзначных и ровно 17 четных чисел. Сколько на доске нечетных чисел?

Ответ: 23.

Решение. На доске только двузначные и трехзначные числа, значит, написано 15 + 25 = 40 чисел. Если среди них ровно 17 четных, значит, нечетных чисел 40 – 17 = 23.

3. Даны три подмножества множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:
A = {1; 2; 3; 4; 5},
B = {3; 4; 5; 6; 7},
C = {1; 3; 5; 7; 9}.

Найдите сумму элементов множества $\overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C}$.

Ответ: 29.

Решение. Множества A и C пересекаются по {1; 3; 5}, множества B и C — по {3; 5; 7}. Нужны элементы, которых нет ни в одном из пересечений, это {2; 4; 6; 8; 9}. Их сумма 29.

4. В 8 «М» классе 27 учеников. Они принимали участие в четырёх интернет-каруселях, каждый — хотя бы в одной. В каждой карусели играли 15 человек. При этом 12 человек играли только один раз, остальные — 3 или 4 раза. Сколько играли 4 раза?

Ответ: 3.

Решение. Всего 4 · 15 = 60 «участий». При этом 27 – 12 = 15 активистов (игравших 3 или 4 раза) дают 60 – 12 = 48 «участий». Так как 48 : 15 = 3 (ост. 3), то только 3 ученика играли 4 раза.

5. Даны три подмножества множества {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}:
A = {1; 2; 3; 4; 5},
B = {3; 4; 5; 6; 7},
C = {1; 3; 5; 7; 9}.

Петя пишет выражение, содержащее A, B, C и операции объединения двух множеств, пересечения двух множеств или дополнения к множеству.

Например, $A \cap (B \cup C)$ или $\overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C}$.

Для каждого выражения он находит соответствующее ему множество. Какое наибольшее количество разных множеств может получить таким образом Петя?

Ответ: 256.

Решение. Dсе три подмножества содержат одновременно элементы 3 и 5, поэтому любое выражение, составленное из этих подмножеств, будет либо содержать оба числа одновременно, либо не содержать их совсем. Значит, всего 8 элементов, каждый из которых либо принадлежит, либо не принадлежит полученному Петей множеству: 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 и вместе 3 и 5. Поэтому количество множеств, которые может получить Петя, не больше, чем $2^8 = 256$.

Покажем, как получить каждое из них. Сначала получим каждый из 8 элементов: $\{1\} = A \cap \bar{B} \cap C$, $\{2\} = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, $\{3,5\} = A \cap B \cap C$, $\{4\} = A \cap B \cap \bar{C}$, $\{6\} = \bar{A} \cap B \cap \overline{C}$, $\{7\} = \overline{A} \cap B \cap C$, $\{8\} = \overline{A \cup B \cup C}$, $\{9\} = \overline{A} \cap \bar{B} \cap C$.

Если нужно получить множество, состоящее из нескольких из указанных 8 элементов, то можно составить объединение нужных элементов. Таким образом, все 256 подмножеств могут быть получены.

6. Какие из соотношений верны для любых множеств A, B и C?

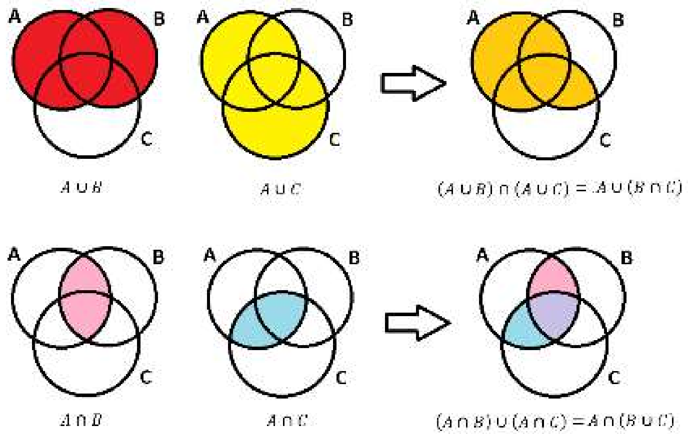
(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ответ: 1 4

Решение. Соотношение (2) неверное — элементы A, которые не принадлежат B и C, входят в левую часть равенства, но не входят в правую часть.

Соотношение (3) неверное — элементы A, которые не принадлежат B и C, входят в правую часть равенства, но не входят в левую часть.

Соотношения (1) и (4) — верные. Это можно проверить с помощью кругов Эйлера:



7. Рассмотрим следующие подмножества множества всех четырёхугольников.
A = {две стороны равны и две другие стороны равны}
B = {диагонали перпендикулярны}
C = {одна диагональ делит другую пополам}

Какие из утверждений являются верными?
(1) A — подмножество B.
(2) C — подмножество B.
(3) C — подмножество A.
(4) Пересечение B и C равно A.
(5) Пересечение B и C — множество всех параллелограммов.

Ответ: 999

Решение. Рассмотрим каждое из утверждений.

(1) и (2) Множества A и C содержит, в частности, все параллелограммы, у некоторых из которых диагонали не перпендикулярны. Поэтому утверждения (1) и (2) неверные.

(3) Множество A состоит из параллелограммов и дельтоидов. В дельтоиде одна диагональ делит другу пополам и они перпендикулярны. В параллелограмме оде диагонали делят друг друга пополам. Очевидно, есть четырехугольник, у которого одна диагональ делит другую пополам, вторая первую — нет, а

диагонали не перпендикулярны. Это элемент множества C, не принадлежащий A. Вывод: утверждение неверное.

(4) и (5) Пересечение B и C состоит из четырехугольников, у которых диагонали перпендикулярны, одна диагональ делит другую пополам. Это дельтоиды. Они могут быть не параллелограммами. В множество A входят также параллелограммы, не являющиеся дельтоидами. Вывод: утверждения (4) и (5) неверные.

8. Экспериментаторы собрали фокус-группу и предложили каждому участнику две таблетки: красную и синюю.

После этого были посчитаны четыре количества:
(1) количество съевших красную таблетку,
(2) количество съевших только одну таблетку,
(3) количество съевших хотя бы одну таблетку,
(4) количество съевших обе таблетки.

Все они оказались разными. Какое количество самое большое?

Ответ: 3.

Решение. Все количества разные, значит самое большое число одно. Список участников, съевших хотя бы одну таблетку, включает в себя три остальных списка в качестве подмножества. Значит, количество (3) окажется самым большим.

9. Сколько существует чисел от 1 до 2020, у которых количество четных делителей равно количеству нечетных?

Ответ: 505.

Решение. Указанные числа — чётные. При этом каждому нечётному делителю d такого числа можно сопоставить в пару делитель $2d$. Значит, в разложении на простые множители такого числа есть только одно число 2.

Значит, подходят нечётные числа от 1 до 1010, умноженные на 2. Их 505 штук.

10. Рассмотрим множество треугольников, у которых длины всех сторон — натуральные числа. Пусть A — подмножество из треугольников с периметром 2019, B — подмножество с периметром 2022. На сколько количество элементов во множестве A меньше количества элементов во множестве B?

Ответ: 0.

Решение. Каждому множеству натуральных чисел $\{x, y, z\}$ сопоставим множество $\{x+1, y+1, z+1\}$.

Если первая тройка — длины сторон треугольника с периметром 2019, то вторая — длины сторон треугольника с периметром 2019 + 3 = 2022.

Если вторая тройка — длины сторон треугольника с периметром 2022, то первая либо длины сторон треугольника с периметром 2019, либо одно число равно сумме двух других. Так как 2019 — нечётное число, то второй вариант невозможен.

Значит, в A и B поровну треугольников.

11. Рассмотрим множество треугольников, у которых длины всех сторон — натуральные числа. Пусть A — подмножество из треугольников с периметром 2022, B — подмножество с периметром 2025. На сколько количество элементов во множестве A меньше количества элементов во множестве B?

Ответ: 505.

Решение. Каждому множеству натуральных чисел $\{x, y, z\}$ сопоставим множество $\{x+1, y+1, z+1\}$.

Если первая тройка — длины сторон треугольника с периметром 2022, то вторая — длины сторон треугольника с периметром 2022 + 3 = 2025. Действительно, если, например, $(x+y)-z>0$, то $(x+1)+(y+1)-(z+1)=(x+y)-z+1>0$.

Если вторая тройка — длины сторон треугольника с периметром 2025, то первая либо длины сторон треугольника с периметром 2022, либо одно число равно сумме двух других. Действительно, если, например, $(x+1)+(y+1)-(z+1)=(x+y)-z+1>0$, то $(x+y)-z\geq 0$.

В такой тройке одно число равно 2022 : 2 = 1011, а два других дают в сумме 1011. Сумму 1011 дают 505 пар чисел: 1 + 1010, 2 + 1009, …, 505 + 506.

Вывод: во множестве A на 505 меньше треугольников, чем во множестве B.

12. На инопланетный конгресс собрались 25 инопланетян. Ровно у 8 из них количество глаз равно количеству ушей, а ровно у 13 из них количество глаз не равно количеству ртов. Найдите минимально возможное число инопланетян, у которых количество ушей не равно количеству ртов.

Ответ: 3.

Решение. У 25 – 13 = 12 инопланетян совпадает количество глаз и ртов. Не более чем у 8-ми из них совпадает количество глаз и ушей, значит, по крайней мере у 4-х не совпадает число ртов и ушей.

С другой стороны, может оказаться, что количество ртов и ушей не совпадает ровно у 4-х инопланетян. Например, у

13. Про подмножества A, B, C множества $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ известно, следующее:

$A \cap B = \{1; 2\}$,

$B \cap C = \{3; 7\}$,
$A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$,
$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$.

Найдите сумму чисел, входящих в A.

Ответ: 3.

Решение. Из третьего условия следует, что множество A не содержит 4, 5, 9, из четвертого — что не содержит 6 и 8. Значит, множество A содержит только какие-то из чисел 1, 2, 3, 7.

Если число 1 или 2 не входит в A, то входит в B и C, но его нет в их пересечении. Значит, они оба в A.

Числа 3 и 7 есть и в B, и с C, но их нет в пересечении A и B. Значит, их нет в A.

Вывод: $A = \{1; 2\}$. Искомая сумма равна 1 + 2 = 3.

14. Пусть A — множество всех натуральных чисел от 1 до 2022, A_n — множество натуральных чисел, кратных n. Сколько чисел содержит множество

$(A \backslash A_2) \cup (A \backslash A_3) \cup (A \backslash A_4) \cup (A \backslash A_5) \cup (A \backslash A_6) \cup (A \backslash A_7)$?

Ответ: 2018.

Решение. Данное объединение не содержит только числа множества A, которые кратны одновременно всем числам 2, 3, …, 7.

Так как НОК (2; 3; 4; 5; 6; 7) = 420, то это числа кратные 420. Их от 1 до 2022 всего [2022 : 420] = 4 штуки. Останется 2022 – 4 = 2018.

15. В классе 24 ученика. Все мальчики в классе почему-то не умеют писать цифру 2 и просто пропускают ее при письме, а девочки почему-то не знают цифру 3 и тоже ее пропускают. Однажды учительница попросила треть детей написать число 241, треть — число 341, а остальных — число 2341. Оказалось, что число 241 было написано 10 раз, а число 341 — 12 раз. Сколько детей верно выполнили задание учительницы?

Ответ: 14.

Решение. Треть учеников, то есть 24 : 3 = 8 человек, должны были написать число 2341. Все они ошиблись: мальчики вместо него написали 341, а девочки — 241. При этом 341 или 241 написали 10 + 12 = 22 человека. Из них 8 ошиблись, а остальные 22 – 8 = 14 учеников выполнили задание верно.