Блок 3. Делимость: разложения на простые

Интернет-карусель (2023–2024)

Задания, ответы, решения и комментарии

1. Паша написал на доске несколько натуральных чисел от 1 до 20. Любые два из написанных чисел являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество чисел мог написать Паша?
2. Олег перемножил 7 подряд идущих натуральных чисел от N до $N + 6$. Произведение этих чисел оканчивается ровно на 6 нулей. При каком наименьшем N такое возможно?
3. Простое число p таково, что $s = 15p^2 + 36$ делится на 12. Чему равно s?
4. За одну операция из числа можно вычитать его наибольший простой делитель. Например, у числа 18 наибольший простой делитель равен 3, поэтому из 18 за одну операцию получается число 18 – 3 = 15. Через сколько операций из числа 2023 получится 0?
5. Натуральное число N назовем *красивым*, если в ряду его делителей, выписанных в порядке возрастания, четные и нечетные числа чередуются. Сколько *красивых* чисел от 1 до 100?
6. Сколько трёхзначных чисел, которые делятся и на число 12, и на число 15?
7. Сколько трёхзначных чисел, которые делятся ровно на одно из чисел 12 и 15?
8. Число 18 имеет делители: 1, 2, 3, 6, 9 и 18. Простое число p таково, что число $n = 18p$ имеет ровно 8 делителей. Чему равно число n?
9. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого делится на 2023.
10. Для любого натурального числа k произведение всех натуральных чисел от 1 до k обозначают $k!$. Найдите наименьшее натуральное число n, что n! делится на 2023.
11. Найдите наименьшее натуральное число n, что сумма $n! + (n + 1)!$ делится на 2023.
12. Найдите наименьшее натуральное число n, что сумма $n! + (n + 1)! + (n + 2)!$ делится на 2023.
13. Предприниматель Вася по ночам делает ёлочки (новогодние сувениры). Он их продаёт по одинаковой цене, являющейся целым числом рублей. Его друг Витя заказал ёлочек на 123 123 рубля, его подруга Оля — на 2 665 рублей. Вася — математик, он посчитал, что ему надо сделать N ёлочек и это наименьшее возможное количество при таких заказах. Чему равно N?

14. Произведение двух натуральных чисел равно 2024, а их сумма нечётна. Чему равна эта сумма?
15. Кирилл нашёл все такие натуральные числа N, что наименьшее общее кратное чисел 60 и N не превосходит 200. Сколько чисел нашёл Кирилл?

Задания, ответы, решения и комментарии

1. Паша написал на доске несколько натуральных чисел от 1 до 20. Любые два из написанных чисел являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество чисел мог написать Паша?

   Ответ: 9.

   Решение. Пример. Можно вписать все простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и число 1 — их 9 штук.

   Оценка (способ 1). Если бы взяли 10 чисел, то надо взять одно чётное, число 1 и еще 8 нечётных из девяти: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Но нельзя взять вместе 5 и 15, 3 и 9. Поэтому, 10 чисел выписать нельзя.

   Оценка (способ 2). Если вписано какое-то число, отличное от 1, то его можно заменить его наименьшим простым делителем. Значит, есть наибольший по количеству чисел набор состоит из числа 1 и простых чисел. Так как простых от 1 до 20 всего 8 чисел, то в наборе не более 9 чисел.

   Комментарий. Из способа 2 оценки следует, что наибольший набор, например, для чисел от 1 до 100 состоит из числа 1 и всех простых из указанного промежутка.

   Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 210, 8, 9.

2. Олег перемножил 7 подряд идущих натуральных чисел от N до $N + 6$. Произведение этих чисел оканчивается ровно на 6 нулей. При каком наименьшем N такое возможно?

   Ответ: 3119.

   Решение. Среди 7 подряд идущих чисел есть не более 2 чисел, кратных 5. Произведение кратно 5^6. Возможны 2 ситуации: есть только одно такое число или есть 2 числа.

   В первом случае оно число кратно $5^6 = 15625$, то есть числа не менее 15 000.

   Во втором случае одно из кратных 5 чисел делится только на первую степень числа 5, а второе должно быть кратным $5^5 = 3125$. Тогда наименьший набор 3119, 3120, 3121, 3122, 3123, 3124, 3125. Он подходит: в их произведение числа 3120 и 3125 вносят $5 \cdot 5^5 = 5^6$, чётные числа вносят $2^3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 2^6$, значит произведение оканчивается ровно на 6 нулей.

   Вывод: искомое значение N равно 3119.

   Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 100 000, 3119, 3120, 3124, 99994, 99999, таких чисел нет.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2023–2024 учебный год

3. Простое число p таково, что $s = 15p^2 + 36$ делится на 12. Чему равно s?

   Ответ: 96.

   Решение. Так как 36 кратно 12, то $15p^2$ должно делиться на 12. Значит, простое число p кратно 2, то есть $p = 2$. При $p = 2$ получаем $s = 15 \cdot 2^2 + 36 = 96$.

   Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 2, 96, таких чисел более десяти.

4. За одну операция из числа можно вычитать его наибольший простой делитель. Например, у числа 18 наибольший простой делитель равен 3, поэтому из 18 за одну операцию получается число 18 – 3 = 15. Через сколько операций из числа 2023 получится 0?

   Ответ: 35.

   Решение. У числа 2023 наибольший простой делитель 17, 2023 = 17 · 119. При вычитании 17 будем получим 17 · 118 = 17 · 2 · 59 = 34 · 59. Далее будем 34 раза вычитать простое число 59, пока не получим 0. Будет 34 + 1 = 35 операций.

   Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 1, 3, 5, 7, 35, 119.

5. Натуральное число N назовем *красивым*, если в ряду его делителей, выписанных в порядке возрастания, четные и нечетные числа чередуются. Сколько *красивых* чисел от 1 до 100?

   Ответ: 22.

   Решение. Во-первых, если число имеет в разложении на простые множители число 2 в степени k, то любому его нечётном делителю d можно однозначно сопоставить чётные делители $2d, 2^2d, \dots, 2^kd$. То есть, чётных делителей в k раз больше, чем нечётных.

   Во-вторых, у красивого числа чередуются чётные и нечётные делители, первый делитель нечётный (равен 1), последний чётных (равен искомому числу). Значит, чётных и нечётных делителей поровну. То есть, красивое число имеет вид $2n$, где n — нечётное число.

   Случай 1: n — число 1, простое или степень простого. Число 2 — красивое. Красивыми являются все числа вида $2p^k$, где p — некоторое нечётное простое число. Ряд его делителей выглядит так 1, p, $2p$, p^2, $2p^2$ и так далее. Таких чисел 18 — это числа 6, 18, 54, 10, 50, 14, 98, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94. Они равны удвоенным числам 3, 3^2, 3^3, 5, 5^2, 7, 7^2, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47.

   Случай 2: n — произведение двух разных простых делителей. Пусть является красивым число $2n = 2pq$, где p и q — простые числа, $p < q$. Тогда ряд его делителей должен быть таким: 1, 2, p, $2p$, q, $2q$, pq, $2pq$. Чтобы было так, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $q > 2p$. Если $p \geq 5$, то $2p \geq 10$, $q \geq 11$ и красивое число $2pq > 100$, такое не подходит. Тогда $p = 3$, $q > 2p = 6$. Но при $q > 16$ число $2pq > 100$. То есть q может равняться 7, 11 или 13. При этом получаем красивые числа $2pq$, равные 42, 66, 78.

Случай 3: n имеет более двух простых делителей, не все из которых равны. Наименьшее такие число, не превосходящее 100, — это $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Число $2n$ не красивое — ряд его делителей начинается 1, 2, 3, 5, ..., то есть два соседних нечётных делителя.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 50.

6. Сколько трёхзначных чисел, которые делятся и на число 12, и на число 15?

Ответ: 15.

Решение. Подходящее трёхзначное число должно делиться на НОК (12; 15) = 60. Это числа 120 = 2 · 60, ..., 960 = 16 · 60 — всего 15 штук.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 5, 15, 60.

7. Сколько трёхзначных чисел, которые делятся ровно на одно из чисел 12 и 15?

Ответ: 105.

Решение. На 12 делятся числа от 108 = 9 · 12 до 996 = 83 · 12 — всего 75 штук. На 15 делятся числа от 105 = 7 · 15 до 990 = 66 · 15 — всего 60 штук. При этом 15 чисел делятся на оба числа, они учтены дважды. Поэтому подходят 75 + 60 – 15 · 2 = 105 чисел.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 15, 105, 120, 135.

8. Число 18 имеет делители: 1, 2, 3, 6, 9 и 18. Простое число p таково, что число $n = 18p$ имеет ровно 8 делителей. Чему равно число n?

Ответ: 54.

Решение. Число $18p$ имеет делители 1, 2, 3, 6, 9, 18 и p, $2p$, $3p$, $6p$, $9p$, $18p$. Если простое число p отлично от 2 и 3, то n все эти 12 делителей различны, что не удовлетворяет условию. Остаётся проверить $p = 2$ и $p = 3$.

При $p = 2$ имеем делители 1, 2, 3, 6, 9, 18 и 2, 4, 6, 12, 18, 36 — всего 9 различных, что не удовлетворяет условию.

При $p = 3$ имеем делители 1, 2, 3, 6, 9, 18 и 3, 6, 9, 18, 27, 54 — всего 8 различных. Тогда $n = 18p = 54$.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 3, 36, 54, таких чисел нет.

9. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого делится на 2023.

Ответ 119.

Решение. Если n^2 делится на $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$, то n кратно 7 и 17, то есть не менее $7 \cdot 17 = 119$. С другой стороны, само число 119 подходит: $119^2 = 7^2 \cdot 17^2 = 7 \cdot 2023$.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 119, 17, 2023.

10. Для любого натурального числа k произведение всех натуральных чисел от 1 до k обозначают $k!$. Найдите наименьшее натуральное число n, что n! делится на 2023.

Ответ: 34.

Решение. Так как $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$, то среди чисел от 1 до n должно быть хотя бы два числа, кратных 17, или число, кратное 17^2. В первом случае $n \geq 34$, во втором — не менее 289. Но подходит 34, так как 34! делится на $7 \cdot 17 \cdot 34$, то если кратно $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 7, 15, 17, 34, таких чисел нет.

11. Найдите наименьшее натуральное число n, что сумма $n! + (n + 1)!$ делится на 2023.

Ответ: 32.

Решение. Заметим, $n! + (n + 1)! = n! + n!\,(n + 1) = n!\,(n + 2)$, $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$. Если $n \leq 32$, то $n!$ и $n + 2$ не кратны 17^2 и не кратны 17 одновременно. При этом при $n = 32$ получаем $32! + 33! = 32! \cdot 34$ делится на $7 \cdot 17 \cdot 34$, то если кратно $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 17, 32, 34, таких чисел нет.

12. Найдите наименьшее натуральное число n, что сумма $n! + (n + 1)! + (n + 2)!$ делится на 2023.

Ответ: 15.

Решение. Заметим, $n! + (n + 1)! + (n + 2)! = n!\,(n + 2) + (n + 2)! = n!\,(n + 2)^2$, $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$. Если $n \leq 14$, то данная сумма не делится на 17. При этом при $n = 15$ получаем $15! + 16! + 17! = 15! \cdot 17^2$ делится на $7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 15, 17, 34, таких чисел нет.

13. Предприниматель Вася по ночам делает ёлочки (новогодние сувениры). Он их продаёт по одинаковой цене, являющейся целым числом рублей. Его друг Витя заказал ёлочек на 123 123 рубля, его подруга Оля — на 2 665 рублей. Вася — математик, он посчитал, что ему надо сделать N ёлочек и это наименьшее возможное количество при таких заказах. Чему равно N?

Ответ: 236.

Решение. Чем больше цена одной ёлки, тем меньше число N. Значит, цена одной ёлки — наибольший общий делитель чисел 123123 и 2665. Так как $2665 = 5 \cdot 41 \cdot 13$ и $123123 = 3 \cdot 41 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, то НОД $= 41 \cdot 13 = 533$. Тогда Витя закажет $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ ёлок, Оля — 5 ёлок, $5 + 231 = 236$.

14. Произведение двух натуральных чисел равно 2024, а их сумма нечётна. Чему равна эта сумма?

Ответ: 111, 195, 261 или 2025.

Решение. Заметим, что $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$. Так как сумма чётна, то одно из слагаемых чётно, а другое нечётно. То есть одно из чисел в разложении на простые множители имеет 8 и еще 11 или 23, а второе – оставшиеся простые множители 11 или 23 (или просто равно 1). Искомая сумма равна либо $8 + 11 \cdot 23 = 261$, либо $8 \cdot 11 + 23 = 111$, либо $8 \cdot 23 + 11 = 195$, либо $2024 + 1 = 2025$.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: только 111, только 195, только 261, верный набор и верный набор без 2025.

15. Кирилл нашёл все такие натуральные числа N, что наименьшее общее кратное чисел 60 и N не превосходит 200. Сколько чисел нашёл Кирилл?

Ответ: 22.

Решение. Так как НОК $(60; N)$ кратен 60 и не более 200, то он равен 60, 120 или 180.

В первом случае 60 кратно N, у числа 60 всего 12 делителей.

Во втором случае N содержит на один делитель 2 больше, чем 60, а также может иметь иные простые множители числа $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. То есть N содержит в разложении на простые множители $8 = 2^3$, а также может содержать 3 и 5 (в степени 1). Это 4 варианта: $2^3, 2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

В третьем случае N содержит на один делитель 3 больше, чем 60, а также может иметь иные простые множители числа $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. То есть N делится на 9, содержит 2 в степени от 0 до 2 и 5 в степени 0 или 1. Всего $6 = 3 \cdot 2$ вариантов.

Итого Кирилл нашёл $12 + 4 + 6 = 22$ числа.

Комментарий. Ответы, которые дали не менее 10 команд: 12, 14, 22, таких чисел нет.