Блок 4. Комбинаторика

Подготовительное занятие

Задания

- Федот изготавливает колёса для телег и карет. К нему пришёл покупатель Фёдор и хочет выбрать из 10 одинаковых колес, готовых на данный момент. Сколькими способами он может выбрать себе (а) два, (б) три, (в) девять, (г) восемь колес?
- Сколькими способами Фёдор может совершить покупку, если он может купить любое количество понравившихся ему колес (из имеющихся 10 штук)?
- Федот красит спицы колес в разные цвета, каждую — в один цвет. Сколькими способами он может раскрасить спицы, если
(а) в колесе 7 спиц, есть 7 разных цветов, все спицы должны быть разными;
(б) в колесе 9 спиц, есть 8 разных цветов, все цвета должны быть использованы?
Способы, которые получаются друг из друга поворотом (но не переворотом) колеса, считаются одинаковыми.

1. На балу собрались 5 дам и 5 кавалеров.
(а) Сколькими способами они могут разбиться на пары «кавалер + дама»?
(б) Сколькими способами они могут разбиться на пары, если одна из дам ни за что не будет в паре с одним из кавалеров?
2. Федот пришёл в лавку Фёдора за товаром. Там, помимо прочего, есть 4 кочана капусты, 5 тыкв и 6 кабачков. Сколькими способами Федот может выбрать (а) 1 кочан, 1 тыкву и 1 кабачок, (б) 1 кочан, 2 тыквы и 1 кабачок, (в) 1 кочан, 1 тыкву и 3 кабачка, (г) 1 кочан, 2 тыквы и 3 кабачка?
3. В комнате Вальдемара есть люстра, две настольные лампы и три разных настенных светильника. Когда он приходит вечером с работы, он включает некоторые из них. (а) Сколькими способами он может это сделать? (б) Сколькими способами он может включить не менее двух ламп? Порядок включения не важен.
4. На карусели 11 одинаковых мест.
(а) Сколькими способами на неё могут сесть 11 малышей?
(б) Сколькими способами могут заполнить все места 12 малышей?
5. Маша собирает бусы из 10 бусин. Бусы, которые получаются друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми. Сколькими способами Маша может сделать бусы (а) из 1 черной и 9 белых бусин, (б) из 2 черных и 8 белых бусин, (в) из 10 бусин 10 разных цветов?
(г) Бусы делают из 2 черных и нескольких белых бусин. Когда способов собрать бусы больше, когда в бусах 100 бусин или когда 101 бусина?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2023–2024 учебный год

Блок 4. Комбинаторика

Подготовительное занятие

Задания

- Федот изготавливает колёса для телег и карет. К нему пришёл покупатель Фёдор и хочет выбрать из 10 одинаковых колес, готовых на данный момент. Сколькими способами он может выбрать себе (а) два, (б) три, (в) девять, (г) восемь колес?
- Сколькими способами Фёдор может совершить покупку, если он может купить любое количество понравившихся ему колес (из имеющихся 10 штук)?
- Федот красит спицы колес в разные цвета, каждую — в один цвет. Сколькими способами он может раскрасить спицы, если
(а) в колесе 7 спиц, есть 7 разных цветов, все спицы должны быть разными;
(б) в колесе 9 спиц, есть 8 разных цветов, все цвета должны быть использованы?
Способы, которые получаются друг из друга поворотом (но не переворотом) колеса, считаются одинаковыми.

1. На балу собрались 5 дам и 5 кавалеров.
(а) Сколькими способами они могут разбиться на пары «кавалер + дама»?
(б) Сколькими способами они могут разбиться на пары, если одна из дам ни за что не будет в паре с одним из кавалеров?
2. Федот пришёл в лавку Фёдора за товаром. Там, помимо прочего, есть 4 кочана капусты, 5 тыкв и 6 кабачков. Сколькими способами Федот может выбрать (а) 1 кочан, 1 тыкву и 1 кабачок, (б) 1 кочан, 2 тыквы и 1 кабачок, (в) 1 кочан, 1 тыкву и 3 кабачка, (г) 1 кочан, 2 тыквы и 3 кабачка?
3. В комнате Вальдемара есть люстра, две настольные лампы и три разных настенных светильника. Когда он приходит вечером с работы, он включает некоторые из них. (а) Сколькими способами он может это сделать? (б) Сколькими способами он может включить не менее двух ламп? Порядок включения не важен.
4. На карусели 11 одинаковых мест.
(а) Сколькими способами на неё могут сесть 11 малышей?
(б) Сколькими способами могут заполнить все места 12 малышей?
5. Маша собирает бусы из 10 бусин. Бусы, которые получаются друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми. Сколькими способами Маша может сделать бусы (а) из 1 черной и 9 белых бусин, (б) из 2 черных и 8 белых бусин, (в) из 10 бусин 10 разных цветов?
(г) Бусы делают из 2 черных и нескольких белых бусин. Когда способов собрать бусы больше, когда в бусах 100 бусин или когда 101 бусина?

karusel.desc.ru ~ 180 ~

Указания, ответы и решения

В материалах 5–6 класса рассматривались начальные идеи комбинаторики: перебор, правила сложения и умножения, способ двойного подсчёта, идея дополнения. Данная разработка — логическое продолжение.

На занятии 7 класса предлагаем обсудить ситуации, когда удобен многократный подсчёт, и один из стандартных типов комбинаторных задач — подсчёт количества подмножеств.

Обратите внимание, решения задач для самостоятельного решения ссылаются на комментарии к задачам для предварительного разбора. Там же вводится понятие факториала числа, используемого в дальнейшем для записи ответов к задачам.

Предлагаем в начале занятия обсудить и разобрать решения следующих задач.

- Федот изготавливает колёса для телег и карет. К нему пришёл покупатель Фёдор и хочет выбрать из 10 одинаковых колес, готовых на данный момент. Сколькими способами он может выбрать себе (а) два, (б) три, (в) девять, (г) восемь колес?

  (а) Ответ: 45.

  Решение. Первое колесо можно выбрать 10 способами, второе — 9 способами. Но каждая пара выбранных колёс считается дважды: если выбраны колёса А и Б, то могли первым выбрать А, вторым — Б или наоборот первым — А, вторым — Б. Поэтому искомое число равно $10 \cdot 9 : 2 = 45$.

  Комментарий. Полезно запомнить, что два предмета из n штук можно выбрать $n(n-1) : 2$ способами.

  (б) Ответ: 120.

  Решение. Первое колесо можно выбрать 10 способами, второе — 9, третье — 8; всего $10 \cdot 9 \cdot 8$ вариантов. При этом каждая тройка выбранных колёс А, Б, В считается несколько раз: могли быть выбраны в порядке АБВ, а могли АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА (6 вариантов). Поэтому искомое число равно $10 \cdot 9 \cdot 8 : 6 = 120$.

  Комментарий. Полезно запомнить, что три предмета из n штук можно выбрать $n(n-1)(n-2) : 6$ способами.

  Комментарий. Пусть выбирали 4 колеса. Сначала выбираем упорядоченную четверку — $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ способов. Сколько раз посчитана каждая четверка? В каждой четверке первым мог быть выбран любой из 4 предметов, вторым — любой из оставшихся 3 предметов, третьим — любой из 2 оставшихся, четвертым — последний оставшийся предмет. Всего $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ раз.

  Аналогично можно рассуждать и в задачах с выбором большего числа предметов. В каждой находят количество подмножеств с фиксированным числом элементов. В разобранных выше — количество подмножеств из 2 и 3 элементов множества, состоящего из 10 элементов.

  (в) Ответ: 10.

  Решение. Выбрать 9 колес из 10 имеющихся можно выбрав то одно колесо, которое не будет куплено. Это можно сделать 10 способами.

  (г) Ответ: 45.

  Решение. Выбрать 8 колес из 10 имеющихся можно выбрав те 2 колеса, которое не будут куплены. Это можно сделать, согласно решению пункта (а), 45 способами.

  Комментарий. Рассуждения, приведенные в решениях пунктов (в) и (г), аналогичны доказательству следующего факта. Пусть множество состоит из n элементов. Количество способов выбрать подмножество из k элементов равно количеству способов выбрать подмножество из $n-k$ элементов

- Сколькими способами Фёдор может совершить покупку, если он может купить любое количество понравившихся ему колес (из имеющихся 10 штук)?

  Ответ: 1023.

  Решение. Представим, что Федот выставил все 10 колёс в ряд перед Фёдором. Про первое колесо Фёдор может решить, покупать его или нет. Про второе колесо у него также 2 выбора, и так далее. Всего $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{10\text{ раз}} = 2^{10} = 1024$ способов, среди которых есть вариант, когда Фёдор не выбрал ничего (покупки не состоялось). Значит, вариантов для совершения покупки $1024 - 1 = 1023$.

  Комментарий. Заметим, в задаче предлагают найти число непустых подмножеств множества из 10 элементов. В общем случае аналогично получается следующий результат: множество из n элементов имеет 2^n подмножеств (включая само множество и пустое множество).

- Федот красит спицы колес в разные цвета, каждую — в один цвет. Сколькими способами он может раскрасить спицы, если
  (а) в колесе 7 спиц, есть 7 разных цветов, все спицы должны быть разными;
  (б) в колесе 9 спиц, есть 8 разных цветов, все цвета должны быть использованы?

  Способы, которые получаются друг из друга поворотом (но не переворотом) колеса, считаются одинаковыми.

  (а) Ответ: 720.

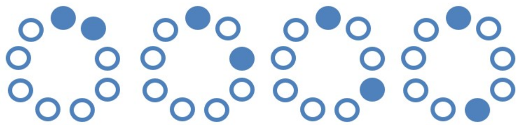
Решение 1. Пронумеруем цвета: № 1, № 2, …, № 7. Найдётся спица цвета № 1. Будем выбирать цвета для остальных по часовой стрелке: следующую — 6 способами, далее — 5 способами, и так далее. Всего $6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 720$ способов.

Решение 2. Начнем выбирать цвета для спиц по часовой стрелке, начиная с произвольной: для 1-ой спицы 7 способов, для 2-ой — 6, …, для последней — 1. Всего $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ способов. Каждую раскраску посчитали несколькими способами: она могла быть получена, начиная с любой из 7 спиц. Значит, всего $(7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1) : 7 = 720$ способов.

Комментарий. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называют факториалом числа n и обозначают $n!$. Например, в пункте (а) ответ можно записать как 6!.

(б) Ответ: $4 \cdot 8! = 161\,280$.

Решение. Сначала определим положение двух спиц одинакового цвета. Четыре возможных варианта показаны на рисунке.



Расположим варианты как на рисунке и начнем выбирать цвета по часовой стрелке, начиная с верхней спицы: 8 способов, 7, 6, и так далее (вторую спицу пары пропускаем, так как для неё цвет уже выбран). Всего 8! способов. Заметим, что поворотами разные варианты не станут совпадать. Значит, всего $4 \cdot 8!$ способов.

Замечание 1. В задачах по комбинаторике часто числовой ответ оказывается очень большим числом. Принято оставлять его в виде арифметического выражения, использующего факториалы чисел, в данном случае как $4 \cdot 8!$.

Замечание 2. Как определить число разных расположений двух спиц, когда их много? Например, если их не 9, а 99. Об этом сказано в решении задачи № 5 (г).

Задачи для самостоятельного решения на занятии.

1. На балу собрались 5 дам и 5 кавалеров.
(а) Сколькими способами они могут разбиться на пары «кавалер + дама»?
(б) Сколькими способами они могут разбиться на пары, если одна из дам ни за что не будет в паре с одним из кавалеров?

(а) Ответ: $5! = 120$.

Решение. Пронумеруем дам. Первая дама выбирает кавалера 5 способами, вторая — 4, …, последняя — 1. Итого $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

(б) Ответ: $4 \cdot 4! = 96$.

Решение 1. Пронумеруем дам так, что указанная дама № 1. Тогда первая дама выбирает кавалера 4 способами, вторая — также 4, …, последняя — 1. Итого $4 \cdot 4! = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

Решение 2. Из всех 5! способов не подходят те, когда у одной дамы определенная пара. Значит, плохих способов 4!. Искомое количество равно $5! - 4! = 4 \cdot 4! = 96$.

2. Федот пришёл в лавку Фёдора за товаром. Там, помимо прочего, есть 4 кочана капусты, 5 тыкв и 6 кабачков. Сколькими способами Федот может выбрать (а) 1 кочан, 1 тыкву и 1 кабачок, (б) 1 кочан, 2 тыквы и 1 кабачок, (в) 1 кочан, 1 тыкву и 3 кабачка, (г) 1 кочан, 2 тыквы и 3 кабачка?

(а) Ответ: 120.

Решение. Федот выбирает капусту 4 способами, тыкву — 5 способами, кабачок — 6 способами. Всего $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

(б) Ответ: 240.

Решение. Выбрать 2 тыквы из 5 можно $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами. Далее капусту можно выбрать 4 способами, кабачок — 6 способами. Всего $10 \cdot 4 \cdot 6 = 240$.

(в) Ответ: 400.

Решение. Выбрать 3 кабачка из 6 можно $6 \cdot 5 \cdot 4 : 6 = 20$ способами. Далее капусту можно выбрать 4 способами, тыкву — 5 способами. Всего $20 \cdot 4 \cdot 5 = 400$.

(г) Ответ: 800.

Решение. Выбрать 2 тыквы из 5 можно $5 \cdot 4 : 2 = 10$ способами. Выбрать 3 кабачка из 6 можно $6 \cdot 5 \cdot 4 : 6 = 20$ способами. Далее капусту можно выбрать 4 способами. Всего $10 \cdot 20 \cdot 4 = 800$.

3. В комнате Вальдемара есть люстра, две настольные лампы и три разных настенных светильника. Когда он приходит вечером с работы, он включает некоторые из них. (а) Сколькими способами он может это сделать? (б) Сколькими способами он может включить не менее двух ламп? Порядок включения не важен.

(а) Ответ: 63.

Решение. Вальдемару нужно выбрать непустое подмножество из $1 + 2 + 3 = 6$ предметов. Это можно сделать $2^6 - 1 = 63$ способами.

(б) Ответ: 57.

Решение. Любое подмножество из 6 светильников можно выбрать $2^6 = 64$ способами. Нужно из этого вычесть пустое множество (1 шт.) и подмножества из 1 светильника (6 шт.). Остается 64 – 1 – 6 = 57.

4. На карусели 11 одинаковых мест.
(а) Сколькими способами на неё могут сесть 11 малышей?
(б) Сколькими способами могут заполнить все места 12 малышей?

(а) Ответ: 10!.

Решение. Аналогично решению пункта (а) задачи про раскраску спиц, получаем 10! способов.

(б) Ответ: 12 · 10!.

Решение. Выберем малыша, который не попадет на карусель, — 12 способов. Остальных можно усадить 10! способами. Итого 12 · 10!.

5. Маша собирает бусы из 10 бусин. Бусы, которые получаются друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.

Сколькими способами Маша может сделать бусы (а) из 1 черной и 9 белых бусин, (б) из 2 черных и 8 белых бусин, (в) из 10 бусин 10 разных цветов?

(г) Бусы делают из 2 черных и нескольких белых бусин. Когда способов собрать бусы больше, когда в бусах 100 бусин или когда 101 бусина?

(а) Ответ: 1.

Решение. Все такие способы получаются друг из друга поворотом.

(б) Ответ: 5 · 9!.

Решение. Заметим, что перевороты не дают новых вариантов. Поэтому, решая аналогично пункту (б) задачи разбора (про колёса), получаем 5 · 9!.

(в) Ответ: 36 · 8!.

Решение. Если бусы не поворачивать и не переворачивать, то раскрашивая бусинки по порядку, получаем 10 · 9 · … · 2 · 1 = 10! способов. Все варианты разбиваются на группы, в каждой из которых любые два варианта получаются друг из друга поворотом и (или) переворотом. Из любого конкретного способа поворотом получается 9 других способов, а переворотом и поворотом — еще 10. Значит, в каждой группе 1 + 9 + 10 = 20 способов. Значит, различных вариантов 10! : 20 = 36 · 8!.

(г) Ответ: поровну.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 7
2023–2024 учебный год

Решение. Для каждого расположения двух чёрных бусинок будем считать количество белых между ними. Так как бусы замкнуты, то таких чисел два. Возьмем меньшее из них.

Заметим, если такие количества для двух расстановок равны, то и расстановки одинаковы. Если всего 100 бусин, то указанное количество равно 0, 1, 2, …, 49. Если их 101, то получаем те же числа. Значит, способов поровну.